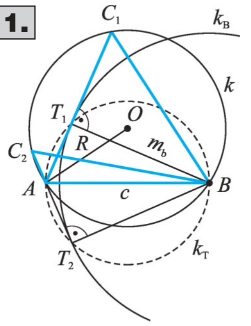
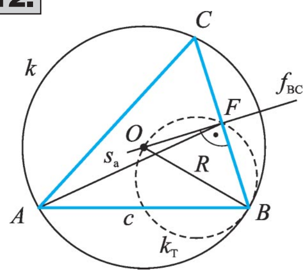
I

611.



612.



611. A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú k kör, benne c hosszúságú húr $\rightarrow A$; B. ② AB Thalész köre k_T. ③ B középpontú m_b sugarú kör $\rightarrow k_B$. ④ $k_B \cap k_T = T_i$. ⑤ $A\, T_i \cap k = C_i$. Nincs megoldás, ha $c > 2R$ vagy $m_b > c$; egy megoldás van, ha $m_b = c$; két megoldás, ha $m_b < c$.

612. A szerkesztés: ① O középpontú R sugarú k kör, benne c hosszúságú húr $\rightarrow A$; B. ② $O \in f_{BC}$ miatt F rajta van OB Thalész körén $\rightarrow k_T$. ③ A középpontú s_a sugarú kör $\rightarrow k_A$. ④ $k_A \cap k_T = F$. ⑤ $BF \cap k = C$. Nincs megoldás, ha $c > 2R$ vagy $k_A \cap k_T = \emptyset$. Minden más esetben vagy 1 vagy 2 megoldás van.

613. Felhasználjuk: a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. A szerkesztés: ① c; $\frac{2}{3}s_a$; $\frac{2}{3}s_b \rightarrow ABS\triangle$. ② AS-re A-ból s_a távolság $\rightarrow F_1$. ③ BS-re B-ből s_b távolság $\rightarrow F_2$. ④ $e(A;F_1) \cap e(B;F_2) = C$. Nincs megoldás, ha az $ABS\triangle$-re nem teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek.

614. A szerkesztés: ① c hosszúságú szakasz felvétele $\rightarrow A$; B. ② m_c távolságra párhuzamos AB-vel $\rightarrow g$ egyenes. ③ AB felezéspontja F. ④ F középpontú s_c sugarú kör $\rightarrow k_F$. ⑤ $k_F \cap g = C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehetséges.

615. A szerkesztés: ① $\frac{c}{2}$; s_c; $b \rightarrow AFC\triangle$. ② $A \xrightarrow{F\text{-re tükrözés}} B$. Nincs megoldás, ha az $AFC\triangle$-re nem teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek.

616. A szerkesztés: ① $\frac{c}{2}$; α; $s_c \rightarrow AFC\triangle$. ② $A \xrightarrow{F\text{-re tükrözés}} B$. Egyértelműen megoldható, ha $s_c > \frac{c}{2}$ (két oldal és a hosszabbikkal szemben fekvő szög adott az $AFC\triangle$-ben). 0; 1 vagy 2 megoldást kaphatunk, ha $s_c \le \frac{c}{2}$.

617. A szerkesztés: ① c hosszúságú szakasz $\rightarrow A$, B. ② AB-re A-ban α szög felvétele $\rightarrow b$. ③ α szög felezése, majd a szögfelezőre f_α távolság $\rightarrow P$. ④ $e(B;P) \cap b = C$. Nincs megoldás, ha BP párhuzamos b-vel.

618. A szerkesztés: ① m_a hosszúságú szakasz felvétele $\rightarrow A$; T. ② T-ben merőleges AT-re $\rightarrow f$. ③ A középpontú s_a sugarú kör $\rightarrow k_1$. ④ $k_1 \cap f = F$. ⑤ A középpontú c sugarú kör $\rightarrow k_2$. ⑥ $k_2 \cap f = B$. ⑦ $B \xrightarrow{F\text{-re tükrözés}} C$. Nincs megoldás, ha $m_a > s_a$ vagy $m_a > c$. 1 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha $m_a = s_a$ és $c > m_a$. 2–2 egybevágó megoldást kapunk, ha $m_a < s_a < c$ vagy $m_a < c < s_a$.

619. A szerkesztés: ① m_a hosszúságú szakasz $\to A$; T. ② T-ben merőleges AT-re $\to f$. ③ A középpontú f_α sugarú kör $\to k_A$. ④ $k_A \cap f = P$. ⑤ AP-re A-ban $\frac{\alpha}{2}$ és $\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$ szög felvétele $\to b$ és c félegyenesek. ⑥ $b \cap f = C$ és $c \cap f = B$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

620. A szerkesztés: ① m_a hosszúságú szakasz $\to A$; T. ② T-ben merőleges AT-re $\to f$. ③ A középpontú f_α sugarú kör $\to k_1$. ④ $k_1 \cap f = P$. ⑤ A középpontú b sugarú kör $\to k_2$. ⑥ $k_2 \cap f = C$. ⑦ $PAC\sphericalangle$ ellentettjét A-ban AP-re felmérni $\to c$ félegyenes. ⑧ $c \cap f = B$. 0 vagy 1 egyenlő szárú háromszög vagy 2 egybevágó háromszög vagy 2-2 egybevágó háromszög lehet a megoldás.

621. A szerkesztés: ① m_a hosszúságú szakasz $\to A$; T. ② T-ben merőleges AT-ra $\to a$. ③ A középpontú c sugarú kör $\to k_A$. ④ $k_A \cap a = B$. ⑤ $ABT\sphericalangle = \beta$ szögfelező félegyenese f. ⑥ f-re B-ből f_β felvétele $\to P$. ⑦ e(P; A) $\cap$ e(B; T) = C. 0; 1 vagy 2 megoldás lehetséges.

622. A szerkesztés: ① γ szög felvétele $\to C$; a; b. ② a-val párhuzamos m_a távolságra $\to f$. ③ $f \cap b = A$. ④ γ szögfelező félegyenesére C-ből f_γ hosszú szakasz $\to P$. ⑤ e(A; P) $\cap\, a = B$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

623. Felhasználjuk: a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja. A szerkesztés: ① $\frac{c}{2}$; $\frac{s_c}{3}$; $\frac{2s_a}{3} \to AF_1S\triangle$. ② F_1S-re S-ből F_1-gyel ellentétes oldalra $\frac{2s_c}{3}$ szakasz $\to C$. ③ A tükörképe F_1-re B. Nincs megoldás, ha az $AF_1S\triangle$-re nem teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek.

624. Tükrözzük az $SBC\triangle$-et az F_a felezéspontra $\to S'CB\triangle$; $SS' = 2SF_a = \frac{2}{3}s_a$; $S'B = SC = \frac{2}{3}s_c$; $SB = \frac{2}{3}s_b$. A szerkesztés: ① $\frac{2}{3}s_a$; $\frac{2}{3}s_b$; $\frac{2}{3}s_c \Rightarrow SS'B\triangle$. ② Tükrözzük S'-t S-re $\to A$. ③ AB szakasz felezőpontja $\to F_c$. ④ SF_c-re S-ből indulva F_c-vel ellentétes oldalon $\frac{2}{3}s_c$ felvétele $\to C$. Nincs megoldás, ha $SS'B\triangle$-re nem teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek.

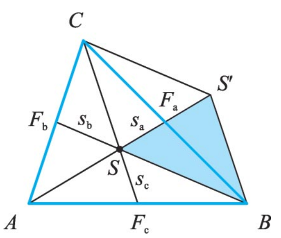
625. A szerkesztés: ① m_a hosszúságú szakasz $\to A$, T_a. ② T_a-ban merőleges AT_a-ra $\to a$. ③ A középpontú c sugarú kör $\to k_A$. ④ $k_A \cap a = B$. ⑤ m_c távolságra párhuzamos AB-vel $\to f$. ⑥ $f \cap a = C$. Nincs megoldás, ha $c < m_a$, két egybevágó háromszög lehet, ha $c = m_a$ és két-két egybevágó háromszög akkor, ha $c > m_a$.

626. A szerkesztés: ① AB szakasz Thalész köre $\to k_T$. ② e(A; P) $\cap\, k_T = C_2$; e(B; P) $\cap\, k_T = C_1$. 0; 1 vagy 2 megoldás van.

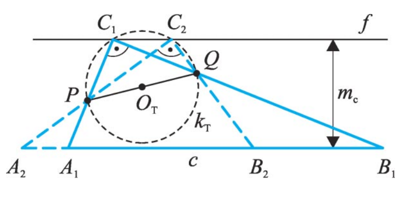
627. A szerkesztés: ① PQ Thalész köre $\to k_T$. ② m_c távolságra párhuzamos c-vel $\to f$. ③ $f \cap k_T = C$. ④ e(C; P) $\cap\, c = A$; e(C; Q) $\cap\, c = B$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

628. A szerkesztés: ① PQ Thalész köre $\to k_T$. ② $k_T \cap k = M_i$. ③ e(M_i; P) $\cap\, k = N_i$; e(M_i; Q) $\cap\, k = R_i$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

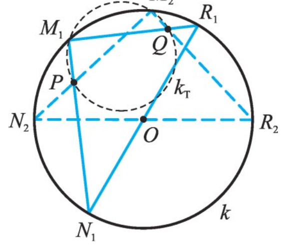
624.



627.



628.



I

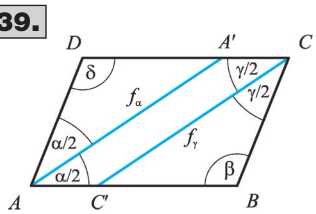
629. *a)* A szerkesztés: ① O_0 középpontú r_0 sugarú kör $\to k$. ② k átmérő egyenese $\to g$; $g \cap k = F$. ③ F-ben merőleges g-re $\to e$. ④ F-ből mindkét irányba $\frac{c}{2}$ hosszú szakasz felvétele az e egyenesen $\to A$; B. ⑤ A-ból érintő k-hoz $\to f$. ⑥ $g \cap f = C$. Nincs megoldás, ha $c \le 2r_0$. *b)* A szerkesztés: ① γ-szög felvétele $\to C$; f; g. ② γ szögfelezője $\to f_\gamma$. ③ r_0 távolságra párhuzamos g-vel $\to e$. ④ $e \cap f_\gamma = O_o$. ⑤ O_o középpontú r_0 sugarú kör $\to k$. ⑥ k-nak f_γ-val való C-től távolabbi metszéspontja $\to F$. ⑦ F-ben merőleges f_γ-ra $\to h$. ⑧ $h \cap f = A$; $h \cap g = B$. Minden $\gamma < 180°$ esetén egyértelműen megoldható.
630. A szerkesztés: ① Az O_c középpontú r_c sugarú kör és az O_0 középpontú r_0 sugarú kör egymást kívülről érintő körök $\to k_0$ és k_c. ② k_0 és k_c közös érintői $\to f; g; h$. ③ $f \cap g = C$; $h \cap f = A$; $h \cap g = B$. Nincs megoldás, ha $r_0 \ge r_c$. Egyébként 1 megoldás van.
631. C-t középpontosan tükrözzük AB felezőpontjára, F-re $\to C' \Rightarrow ACBC'$ paralelogramma. A szerkesztés: ① a; b; $2s_c \to ACC'\triangle$. ② CC' felezőpontja: F. ③ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to B$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
632. A-t középpontosan tükrözzük CB felezőpontjára, F-re $\to A' \Rightarrow ABA'C$ paralelogramma $\Rightarrow ABA'\sphericalangle = 180° - \alpha$. *a)* A szerkesztés: ① c; $2s_a$; $180° - \alpha \to ABA'\triangle$. ② AA' felezőpontja: F. ③ B-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.
b) A szerkesztés: ① c; $2s_a$; $m_c \to ABA'\triangle$. ② AA' felezőpontja: F. ③ B-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.
633. A szerkesztés: ① s_a; m_a; $90° \to AFT\triangle$. ② A középpontú, c sugarú kör: k_A. ③ $k_A \cap e(T;F) = B$. ④ B-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.
634. A-t középpontosan tükrözzük CB felezőpontjára, F-re $\to A' \Rightarrow ABA'C$ paralelogramma. A szerkesztés: ① m_b hosszúságú szakasz: BT. ② B-ben és T-ben merőleges BT-re: e és f. ③ B középpontú, c sugarú kör: k_C. ④ $k_C \cap f = A$. ⑤ A középpontú, $2s_a$ sugarú kör: k_A. ⑥ $k_A \cap e = A'$. ⑦ AA' felezőpontja: F. ⑧ B-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

Négyszögek

Paralelogrammák

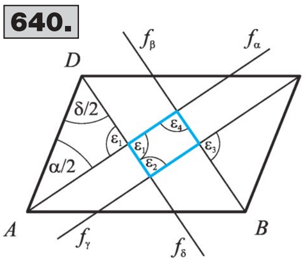
635. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, vagyis $2\alpha + 2\beta = 360°$, azaz $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \beta' = \alpha \Rightarrow AD \parallel BC$ és $AB \parallel DC \Rightarrow ABCD$ paralelogramma.
636. $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \beta' = \alpha \Rightarrow AD \parallel BC$ és $\alpha + \delta = 180° \Rightarrow \delta' = \alpha \Rightarrow AB \parallel CD$. A fentiekből következik, hogy $ABCD$ paralelogramma.

639.

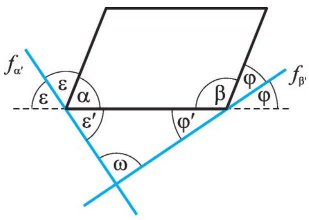


637. $\gamma = \alpha \Rightarrow \gamma = 72°$ és $\delta = \beta \Rightarrow \delta = 108°$. Lehet rombusz, ha oldalai egyenlő hosszúak.
638. $\alpha + \beta = 180°$ és $\alpha + 12{,}8° = \beta \Rightarrow 2\alpha + 12{,}8° = 180° \Rightarrow \alpha = 83{,}6° = \gamma$ és $\beta = 96{,}4° = \delta$.
639. $AA'D\sphericalangle = 180° - \delta - \alpha/2 = \alpha - \alpha/2 = \alpha/2$ és $\alpha/2 = \gamma/2 \Rightarrow f_\alpha$ és f_γ egyenlő szöget zár be DC-vel, irányításuk is azonos. $\Rightarrow$ Ha $A' \not\equiv C$, akkor $f_\alpha \parallel f_\gamma$, ha $A' \equiv C$, akkor $f_\alpha \equiv f_\gamma$.

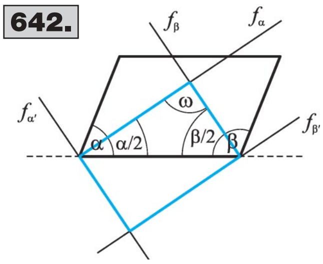
640.



641.



642.



640. **1. eset:** A belső szögfelezők négyszöget határolnak. $\varepsilon_1 = 180° - \alpha : 2 - \delta : 2 = 180° - (\alpha + \beta) : 2 = 180° - 180° : 2 = 90°$. $\varepsilon_2 = 180° - \delta : 2 - \gamma : 2 = 90°$ és $\varepsilon_3 = 180° - \beta : 2 - \gamma : 2 = 90° \Rightarrow \varepsilon_4 = 90° \Rightarrow$ A négyszög téglalap.
2. eset: f_α és f_γ egybeesik, ezért AC szimmetriatengely $\Rightarrow ABCD$ rombusz $\Rightarrow f_\beta$ és f_δ is átló lesz $\Rightarrow$ A szögfelezők egy ponton haladnak át.

641. A külső szögfelezők mindig meghatároznak egy négyszöget. $2\varepsilon + \alpha = 180° \Rightarrow \varepsilon = (180° - \alpha) : 2$ és $\varepsilon' = \varepsilon$, mert csúcsszögek. $2\varphi + \beta = 180° \Rightarrow \varphi = (180° - \beta) : 2$ és $\varphi' = \varphi$, mert csúcsszögek. $\varepsilon' + \varphi' = (180° - \alpha) : 2 + (180° - \beta) : 2 = (360° - (\alpha + \beta)) : 2 = (360° - 180°) : 2 = 90° \Rightarrow \omega = 90°$. Hasonlóan belátható, hogy bármely két szomszédos külső szögfelező szöge 90°.

642. **1. eset:** Szomszédos csúcsok szögfelezői $\Rightarrow$ mindig létrejön négyszög. $\alpha : 2 + \beta : 2 = (\alpha + \beta) : 2 = 90° \Rightarrow \omega = 180° - 90° = 90°$. $f_\alpha \perp f'_\alpha$ és $f_\beta \perp f'_\beta \Rightarrow$ A négyszög minden szöge 90°. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Téglalap.

2. eset: Átellenes csúcsok szögfelezői. ① Ha a paralelogramma rombusz, akkor $f_\alpha \equiv f_\gamma \Rightarrow$ nincs négyszög. ② Ha a paralelogramma nem rombusz, akkor $f_\alpha \neq f_\gamma \Rightarrow f_\alpha \parallel f_\gamma$ és $f_\alpha \perp f_{\alpha'} \Rightarrow f_\gamma \perp f_{\alpha'}$ és $f_\gamma \perp f_{\gamma'} \Rightarrow f_\alpha \perp f_{\gamma'} \Rightarrow$ a négyszög minden szöge derékszög, ezért téglalap.

643. *a)* A paralelogramma szemközti oldalai egyenlők. $\Rightarrow$ A két paralelogramma oldalai megegyeznek, $\beta_1 = 180° - \alpha = \beta_2 \Rightarrow$ A két paralelogramma szögei megegyeznek. $\Rightarrow$ Egybevágók.
b) Két oldal és egy átló egy háromszöget alkot, amelyek a két paralelogrammában egybevágók. A paralelogrammát átlója két középpontosan szimmetrikus háromszögre bontja. Az egybevágó háromszögekből azonos eljárással egybevágó paralelogrammákat kapunk.
c) a; $e/2$; $f/2$ egyértelműen meghatároz egy háromszöget. Ennek a háromszögnek a tükörképe az átlók metszéspontjára egyértelműen meghatározza a paralelogrammát.
d) $e/2$; $f/2$; ε egyértelműen meghatároz egy háromszöget. Ennek a háromszögnek a tükörképe az átlók metszéspontjára egyértelműen meghatározza a paralelogrammát.

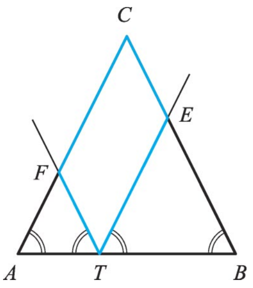
644. *a)* Igen. *b)* Igen. Egyenlő szárú háromszöget tükrözünk valamelyik szár felezőpontjára. *c)* Igen. Egyenlő oldalú háromszöget tükrözünk valamelyik oldal felezőpontjára. *d)* Ha $a = e$ vagy $b = e$, akkor az a; b; e oldalú háromszögben két 90°-os szög lenne, ami nem lehet. Nincs ilyen téglalap.

645. M az $ABCD$ paralelogramma tükörközéppontja, az M-en áthaladó egyenes AB-t E-ben, CD-t F-ben metszi. E és F, A és C, illetve B és D egymás tükörképei, ezért $AEFD$ négyszög tükörképe $CFEB$ négyszög és a középpontos tükrözés egybevágósági transzformáció.

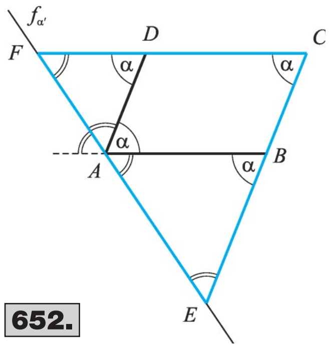
646. *a)* Tengelyesen szimmetrikus paralelogrammák: rombuszok, téglalapok, négyzetek.
b) Minden paralelogramma középpontosan szimmetrikus.

647. Az átlók M metszéspontján áthaladó egyenes AB-t E-ben, CD-t F-ben metszi. M-re vonatkozó középpontos szimmetria miatt: $AE = 7$ cm $\Rightarrow FC = 7$ cm $\Rightarrow DF = 4{,}5$ cm $\Rightarrow EB = 4{,}5$ cm $\Rightarrow AB = AE + EB = 7$ cm $+ 4{,}5$ cm $\Rightarrow$ $\underline{\underline{AB = 11{,}5 \text{ cm}}}$.

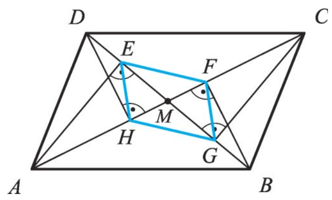
648. Legyen AB felezőpontja E; CD felezőpontja F és az FE középvonal és az AC átló metszéspontja M. $AME\sphericalangle = FMC\sphericalangle$, mert csúcsszögek, valamint $MAE\sphericalangle = MCF\sphericalangle$, mert váltószögek, így $AEM\triangle$ és $MCF\triangle$ szögei egyenlők. $AE = AB/2 = DC/2 = FC \Rightarrow AEM\triangle \cong FCM\triangle \Rightarrow$



651.



652.



654.

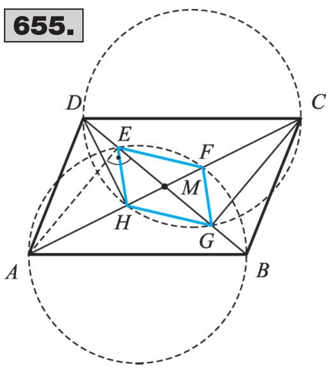
$\Rightarrow AM = MC \Rightarrow M$ az átló felezőpontja, ami az átlók metszéspontja. Hasonlóan megmutatható, hogy GH is átmegy M-en.

649. $AC \cap DB = M$; $AE \cap DB = G$; $AF \cap DB = H$. $ABCD$ paralelogramma $\Rightarrow MD = MB$ és $AM = MC$. $ACD\triangle$-ben AF és DM súlyvonalak $\Rightarrow H$ az $ACD\triangle$ súlypontja, ezért az alábbiak érvényesek: $DH = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}DB = \frac{1}{3}DB$; $HM = \frac{1}{3}DM = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}DB = \frac{1}{6}DB$. Az $ABC\triangle$-ről hasonlóan belátható, hogy $GB = \frac{1}{3}DB$ és $MG = \frac{1}{6}DB \Rightarrow \underline{\underline{DH = HG = GB}}$.

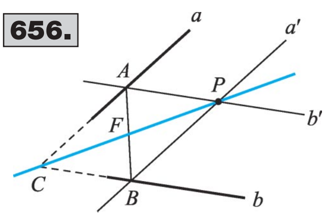
650. Legyen $AC \cap BD = M$ és $AE \cap BD = S$. $AM = MC$ és $BE = EC \Rightarrow BCA\triangle$-ben AE és BM súlyvonalak, ezért harmadolják egymást, vagyis $2ES = AS$ és $2MS = BS$. $\underline{\underline{DS}} = DM + MS = BM + MS = BS + 2MS = \underline{\underline{2BS}}$.

651. $TECF$ paralelogramma, ezért $TE = FC$ és $TF = EC$. $TF \parallel BC \Rightarrow FTA\sphericalangle$ és $CBA\sphericalangle$ egyállásúak, ezért egyenlők. $\Rightarrow AF = FT \Rightarrow K_{TECF} = 2\cdot(TF + TE) = 2\cdot(AF + FC) = 2AC$, ami független T helyzetétől.

655.



656.



652. Az ábrán egyformán jelölt szögek egyenlők (egyállásúak, váltószögek, csúcsszögek). Az $ECF\triangle$ szögeiből tudjuk, hogy egyenlő szárú: $EC = FC$. $AEB\triangle$ is egyenlő szárú: $EB = AB$. $\Rightarrow EC = EB + BC = AB + BC$, vagyis a keresett szár hossza a paralelogramma kerületének fele.

653. Legyen a magasság talppontja T. $AT = TB \Rightarrow AD = BD \Rightarrow \underline{\underline{BD = 5\,\text{cm}}}$.

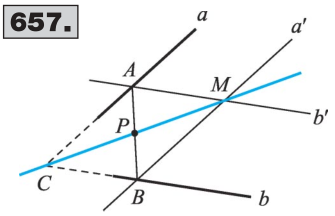
654. **1. eset:** $ABCD$ nem rombusz. M az $ABCD$ paralelogramma szimmetria-középpontja. $\Rightarrow AMD\triangle \cong CMB\triangle$. E, H, illetve F, G a háromszögek magasságainak talppontjai $\Rightarrow E$ tükörképe M-re G, H tükörképe M-re $F \Rightarrow EFGH$ középpontosan szimmetrikus négyszög, azaz paralelogramma. **2. eset:** Ha $ABCD$ rombusz, akkor E; F; G; H mind azonos M-mel.

655. **1. eset:** $ABCD$ nem rombusz. Szerkesszünk köröket AB és CD, mint átmérő fölé. Ezek Thalész-körök, amik szimmetrikusak M-re. E tükörképe M-re G, H tükörképe M-re $F \Rightarrow EFGH$ középpontosan szimmetrikus négyszög, azaz paralelogramma. **2. eset:** Ha $ABCD$ rombusz, akkor a Thalész-körök M-ben metszik az átlókat.

656. $a \parallel a'$ és $b \parallel b' \Rightarrow a, a', b, b'$ egy paralelogrammát fog közre, amelynek AB és CP átlói felezik egymást. Az eljárás kivitelezhető, ha A és B a papírra esik, különben nem.

657. a középpontos tükörképe P-re $a' \Rightarrow a \parallel a'$ és b középpontos tükörképe P-re $b' \Rightarrow b \parallel b'$ és $a' \cap b' = M \Rightarrow a,\ a',\ b,\ b'$ egy paralelogrammát fog közre, amelynek C-be futó átlója PM. Az eljárás kivitelezhető, ha M a papírra esik, különben nem.

657.



658. $ABCD$ paralelogrammát szerkesztjük. *a)* A szerkesztés: ① a; b; $\alpha \to ABD\triangle$. ② DB felezőpontja: F. ③ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. Egyértelmű a megoldás.
b) A szerkesztés: ① b; m_a; $90° \to ADT\triangle$. ② A-ból AT-re a hosszúságú szakasz $\to B$. ③ BD felezőpontja: F. ④ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
c) A szerkesztés: ① a; b; $e \to ADB\triangle$. ② BD felezőpontja: F. ③ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

659. $ABCD$ paralelogrammát szerkesztjük. *a)* A szerkesztés: ① a; m_a; $\alpha \to ABD\triangle$. ② BD felezőpontja: F. ③ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. Egyértelmű a megoldás. *b)* A szerkesztés: ① a; m_b; $90° \to DCT\triangle$. ② DC-vel párhuzamos m_a távolságra $\to e$. ③ $e \cap e(C; T) = B$. ④ BD felezőpontja: F. ⑤ C-t középpontosan tükrözzük F-re $\to A$. 0 vagy 1 megoldás lehet. *c)* A szerkesztés: ① a; $e/2$; $f/2 \to ABF\triangle$. ② AB-t középpontosan tükrözzük F-re $\to CD$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

660. *a)* A szerkesztés: ① $e/2$; $f/2$; $\varepsilon \to MBC\triangle$. ② BC-t középpontosan tükrözzük M-re $\to$ $\to DA$. Egyértelmű a megoldás.
b) A szerkesztés: ① e; m; $90° \to BDT\triangle$. ② BD felezőpontja M. ③ M középpontú, $f/2$ sugarú kör: k. ④ $k \cap e(B; T) = A$. ⑤ A-t középpontosan tükrözzük M-re $\to C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

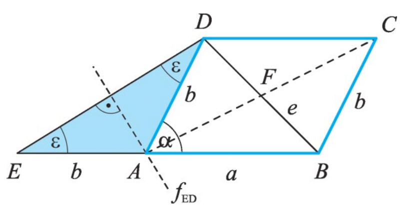
661. *a)* A szerkesztés: ① a; e; $\varphi \to ABD\triangle$. ② BD felezőpontja: F. ③ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. Egyértelmű a megoldás.
b) A szerkesztés: ① a; e; $m_a \to ABD\triangle$. ② BD felezőpontja: F. ③ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.
c) A szerkesztés: ① m_a; m_b; $\varepsilon \to DT_aT_b\triangle$. ② D-ben és T_a-ban merőleges DT_a-ra, D-ben és T_b-ben merőleges DT_b-re. ③ A merőlegesek metszéspontjai adják a paralelogramma csúcsait. Egyértelmű a megoldás.
d) A szerkesztés: ① m_a; e; $90° \to DT_aB\triangle$. ② BD felezőpontja: F. ③ FB szárú, F csúcsú φ szög $\to$ $\to g$. ④ $g \cap e(T_a; B) = A$. ⑤ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

662. A szerkesztés: ① HF. ② HF felezőpontja: M. ③ HF-et eltoljuk $\overrightarrow{ME}$-ral: DA. ④ HF-et eltoljuk $\overrightarrow{EM}$-ral: CB. 0 vagy 3 megoldás lehet.

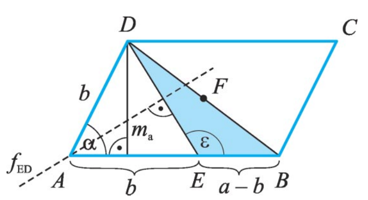
663. Hosszabbítsuk meg AB-t az A-n túl b-vel, E-t kapjuk. α külső szög, ezért $\alpha = 2\varepsilon$. A szerkesztés: ① $\alpha/2$; $a+b$; $e \to EBD\triangle$. ② ED felezőmerőlegese: f_{ED}. ③ $f_{ED} \cap e(E; B) = A$. ④ BD felezőpontja: F. ⑤ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

664. $E \in AB$ úgy, hogy $AE = b$ legyen. $\varepsilon = 90° + \alpha/2$. A szerkesztés: ① ε; $a - b$; $m_a \to DEB\triangle$. ② ED felezőmerőlegese: f_{ED}. ③ $f_{ED} \cap e(E; B) = A$. ④ BD felezőpontja: F. ⑤ A-t középpontosan tükrözzük F-re $\to C$. Egyértelmű a megoldás.

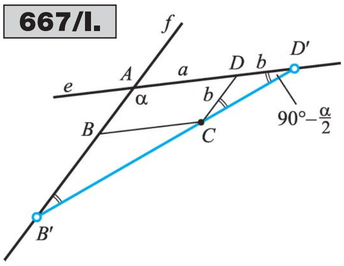
663.



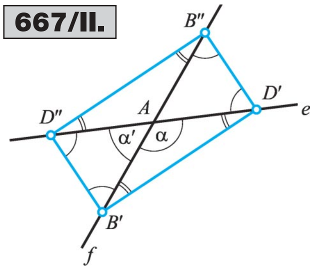
664.



667/I.



667/II.



665. Legyen a paralelogrammák közös oldala AB. K középpont az átlók felezéspontja, ezért K az AB egyenestől $m/2$ távolságra van. ⇒ K az AB-vel párhuzamos, $m/2$ távolságra lévő egyenesek valamelyikén van. Ezen egyenesek minden pontjához tartozik paralelogramma. ⇒ A keresett ponthalmaz az AB-vel párhuzamos, $m/2$ távolságra lévő két egyenes.

666. Legyen a paralelogrammák közös oldala AB, közös oldalegyenese d (AD egyenes). D csúcs a d egyenes minden A-tól különböző pontja lehet. ⇒ C csúcs a B-n áthaladó d-vel párhuzamos c egyenesen van. ⇒ K rajta van c és d középpárhuzamosán, e-n. $e \cap AB = F$. e-nek minden F-től különböző pontja egyértelműen meghatároz egy paralelogrammát. ⇒ A keresett ponthalmaz az e egyenes az F pont kivételével.

667. Legyen a paralelogrammák közös oldalegyenese e és f; $k = 2(a + b)$ = állandó ⇒ $k : 2 = a + b$. $D' \in e(A; D)$ és $AD' = a + b \Rightarrow DD' = DC \Rightarrow DD'C\sphericalangle = DCD'\sphericalangle = 90° - \alpha : 2$. ⇒ C egy olyan egyenlő szárú háromszög alapján mozog, amelynek alappal szemközti csúcsa az egyenesek metszéspontja, szára $k : 2$. (Az alap két végpontja nem jó.) Hasonlóan járhatunk el az e és f által határolt többi szögtartományban is. $\alpha + \alpha' = 180° \Rightarrow AB'D'\sphericalangle + AB'D''\sphericalangle = 90° \Rightarrow B'D'B''D''$ téglalap. A keresett ponthalmaz egy olyan téglalap határvonala (kivéve a téglalap csúcsait), melynek k hosszúságú átlói az adott egyeneseken helyezkednek el és az egyenesek metszéspontjában találkoznak.

Deltoidok, rombuszok

668. Az átlók felezik a rombusz szögeit. $2\varepsilon = \alpha \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon = 19°}}$ és $\underline{\underline{\varphi}} = (180° - \alpha) : 2 = \underline{\underline{71°}}$.

669. $\varepsilon = 42°$. $\varepsilon + \varphi = 90° \Rightarrow \varphi = 48°$. A rombusz szögei 2ε és 2φ nagyságúak, azaz $\underline{\underline{84° \text{ és } 96°}}$.

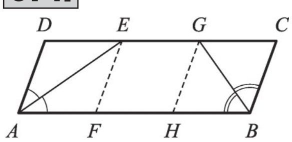
670. Az $ABCD$ rombusz B csúcsából induló m magassága felezi AD-t. ⇒ m szimmetriatengely $DAB\triangle$-ben ⇒ $AB = BD = a \Rightarrow DAB\triangle$ szabályos ⇒ a rombusz szögei: 60° és 120°.

671. Legyen az $ABCD$ rombusz A-nál lévő szöge 60°. $ABD\triangle$ egyenlő oldalú ⇒ $\underline{\underline{e = 12\,\text{cm}}}$.

672. Legyen az $ABCD$ rombusz D-ből induló magasságának talppontja az AB oldalon T. 12 cm = $k = 4a \Rightarrow a = 3$ cm és $m_a = 1{,}5$ cm ⇒ ATD derékszögű háromszögben $\alpha = 30° \Rightarrow$ a rombusz szögei: 30° és 150°.

673. *a)* Az átlók merőlegesen felezik egymást. ⇒ Mindkét átló szimmetriatengely. ⇒ A paralelogramma oldalai egyenlők. ⇒ A paralelogramma rombusz. *b)* A szöget felező átló szimmetriatengely. ⇒ $a = b \Rightarrow$ A paralelogramma rombusz.

674.



674. Legyen $EF \parallel BC$. ⇒ $AFED$ paralelogramma, átlója szögfelező. ⇒ $AFED$ rombusz. ⇒ $DE = AD = \underline{\underline{3\,\text{cm}}}$. Hasonlóan: $GC = BC = \underline{\underline{3\,\text{cm}}}$. $EG = DC - DE - GC = \underline{\underline{3\,\text{cm}}}$.

675. Legyen $AB = 2AD$ és $f_\alpha \cap CD = E$. Az E-n át húzott AD-vel párhuzamos egyenes F-ben metszi AB-t. $EF \parallel AD \Rightarrow AFED$ olyan paralelogramma, aminek az átlója szögfelező. ⇒ $AFED$ rombusz.

I

$\Rightarrow AD = DE = a \Rightarrow E$ felezőpontja DC-nek. Hasonlóan megmutatható, hogy a B-ből induló szögfelező is felezi a DC oldalt.

676. Legyen $f_\alpha \cap f_\beta = M \in DC$. Az M-en át húzott AD-vel párhuzamos egyenes N-ben metszi AB-t. Legyen $MN \parallel AD \parallel BC$. AM szimmetriatengelye $ANMD$-nek. $\Rightarrow ANMD$ rombusz. $\Rightarrow$ $\Rightarrow AD = DM$. BM szimmetriatengelye $NBCM$-nek. $\Rightarrow NBCM$ rombusz. $\Rightarrow MC = CB$; $DM = AD =$ $= BC = MC \Rightarrow DC = DM + MC = 2AD$.

677. Legyen az $ABCD$ rombusz átlóinak metszéspontja M. *a)* $a_1 = a_2$ és $\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow A_1B_1D_1\triangle \cong$ $\cong A_2B_2D_2\triangle$ és $A_1B_1D_1\triangle \cong C_1B_1D_1\triangle$, illetve $A_2B_2D_2\triangle \cong C_2B_2D_2\triangle \Rightarrow A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$.
b) $D_1M_1 = D_2M_2$ és $A_1M_1 = A_2M_2$ és $D_1M_1A_1\sphericalangle = D_2M_2A_2\sphericalangle = 90° \Rightarrow D_1M_1A_1\triangle \cong D_2M_2A_2\triangle \Rightarrow$ Az átlók négy egybevágó háromszögre bontják a rombuszt. $\Rightarrow$ A két rombusz egybevágó.
c) $a_1 = a_2$ és $e_1 = e_2 \Rightarrow A_1B_1D_1\triangle \cong A_2B_2D_2\triangle \Rightarrow$ A két rombusz egybevágó.

678. *a)* A szerkesztés: ① a; a; $\alpha \rightarrow ABD\triangle$. ② A-t tengelyesen tükrözzük BD-re: C. Egyértelmű a megoldás.
b) A szerkesztés: ① $e/2$; $f/2$; $90° \rightarrow ABM\triangle$. ② A-t középpontosan tükrözzük M-re: C. ③ B-t középpontosan tükrözzük M-re: D. Egyértelmű a megoldás.
c) A szerkesztés: ① a hosszúságú szakasz: AD. ② AD-vel párhuzamos egyenes m távolságra: g. ③ A középpontú, a sugarú kör: k. ④ $k \cap g = B$. ⑤ BD felezőmerőlegese: f_{BD}. ⑥ $f_{BD} \cap g = C$. 0; 1 négyzet vagy 2 egybevágó rombusz a megoldás.
d) A szerkesztés: ① α szög $\rightarrow A$; h; j. ② h-val párhuzamos m távolságra: g. ③ $j \cap g = B$. ④ A középpontú, AB sugarú kör: k. ⑤ $k \cap h = D$. ⑥ BD felezőmerőlegese: f_{BD}. ⑦ $f_{BD} \cap g = C$. Egyértelmű a megoldás.

679. A szerkesztés: ① A-t középpontosan tükrözzük K-ra: C. ② AC felezőmerőlegese: f_{AC}. ③ $f_{AC} \cap e = B$. ④ B-t középpontosan tükrözzük K-ra: D. 0; 1 vagy végtelen sok megoldás lehet.

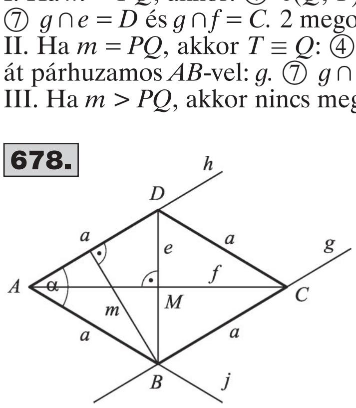
680. Az A pont tükörképe K-ra C, ezért a tükörképe K-ra kimetszi c-ből C-t. A szerkesztés: ① a-t középpontosan tükrözzük K-ra: a'. ② $a' \cap c = C$. ③ C-t középpontosan tükrözzük K-ra: A. ④ AC felezőmerőlegese: f_{AC}. ⑤ $f_{AC} \cap b = B$. ⑥ B-t középpontosan tükrözzük K-ra: D 0; 1 vagy végtelen sok megoldás lehet.

681. f-re K-ban állított merőleges az e egyenes. **1. eset:** E és F az e egyenes különböző oldalán van (E és F_1). A szerkesztés: ① E-t középpontosan tükrözzük K-ra: E'. ② $\mathrm{e}(E'; F_1) \cap f = C$ és $\mathrm{e}(E'; F_1) \cap e = B$. ③ C-t középpontosan tükrözzük K-ra: A. ④ B-t középpontosan tükrözzük K-ra: D.

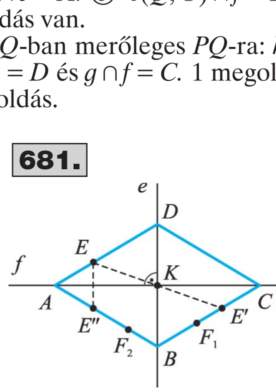
2. eset: E és F az e egyenes azonos oldalán van (E és F_2). A szerkesztés: ① E-t tengelyesen tükrözzük f-re: E''. ② $\mathrm{e}(E''; F_2) \cap f = A$ és $\mathrm{e}(E''; F_2) \cap e = B$. ③ A-t középpontosan tükrözzük K-ra: C. ④ B-t középpontosan tükrözzük K-ra: D. 0 vagy 1 megoldás lehet.

682. $\mathrm{d}(e; f) = m$: a rombusz magassága. A szerkesztés: ① PQ Thalész köre: k_T. ② P középpontú, m sugarú kör: k. ③ $k \cap k_T = T$.
I. Ha $m < PQ$, akkor: ④ $\mathrm{e}(Q; T) \cap e = A$. ⑤ $\mathrm{e}(Q; T) \cap f = B$. ⑥ P-n át párhuzamos AB-vel: g. ⑦ $g \cap e = D$ és $g \cap f = C$. 2 megoldás van.
II. Ha $m = PQ$, akkor $T \equiv Q$: ④ Q-ban merőleges PQ-ra: h. ⑤ $h \cap e = A$ és $h \cap f = B$. ⑥ P-n át párhuzamos AB-vel: g. ⑦ $g \cap e = D$ és $g \cap f = C$. 1 megoldás van.
III. Ha $m > PQ$, akkor nincs megoldás.

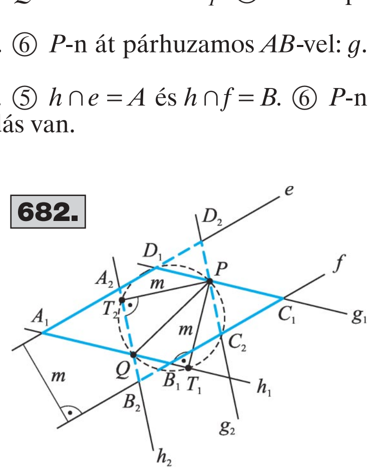
678.



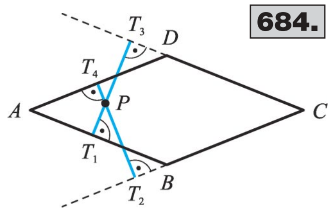
681.

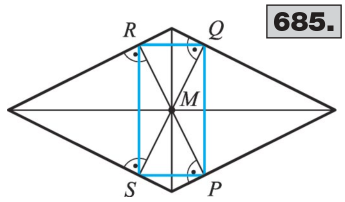


682.



I





683. Legyen az $ABCD$ rombusz átlóinak metszéspontja M, M távolsága az oldalaktól m_1, m_2, m_3 és m_4. $AMB\triangle \cong CMB\triangle \cong AMD\triangle \cong CMD\triangle \Rightarrow m_1 = m_2 = m_3 = m_4$.

684. A rombusz szemközti oldalai párhuzamosak. $\Rightarrow T_1P$ és PT_3, illetve T_2P és PT_4 egy-egy egyenesen vannak. $T_1P + PT_3 = m = T_2P + PT_4$, ahol m a rombusz magassága. $\Rightarrow T_1P - T_2P = T_4P - T_3P$.

685. S; M; Q, illetve P; M; R egy-egy egyenesen vannak. $\Rightarrow SQ = RP =$ a rombusz magassága. M a szimmetria-középpont, ezért $MR = MQ = MP = MS \Rightarrow PQRS$ négyszög átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást. $\Rightarrow PQRS$ téglalap.

686. A tengelyes szimmetria miatt a másik két szög egyenlő. $2\beta + \alpha + \gamma = 360° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 96°}}$.

687. $\alpha = 39°$ és $\gamma = 100° \Rightarrow \beta = (360° - \alpha - \gamma) : 2 = 110{,}5°$. A szimmetriaátló oldalakkal bezárt szöge: $\alpha/2 = 19{,}5°$ és $\gamma/2 = 50°$. A másik átló oldalakkal bezárt szöge ezeknek a pótszöge: $90° - \alpha/2 = 70{,}5°$ és $90° - \gamma/2 = 40°$.

688. Legyen az $ABCD$ deltoid szimmetriatengelye $AC = f$; $BD = e$; $AC \cap BD = M$. *a)* A szerkesztés: ① e; b; $b \rightarrow DBC\triangle$. ② D középpontú, a sugarú kör: k_1. ③ B középpontú, a sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = A$. 0 vagy 2 megoldás lehet.
b) A szerkesztés: ① a; e; $a \rightarrow DBA\triangle$. ② DB felezőmerőlegese: g. ③ A középpontú, f sugarú kör: k. ④ $k \cap g = C$. 0 vagy 2 megoldás lehet.
c) A szerkesztés: ① Ha $\alpha < 180°$, akkor e; $\alpha \rightarrow DBA\triangle$. Ha $\alpha > 180°$, akkor e; $360° - \alpha \rightarrow DBA\triangle$. ② α szögfelezőjének félegyenesére $AC = f$. Egyértelmű a megoldás.

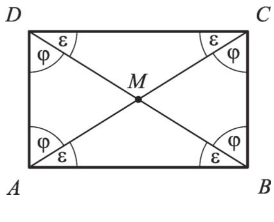
689. Rombusz és négyzet.

Téglalapok, négyzetek

690. A paralelogramma szemközti szögei egyenlők, szomszédos szögei 180°-ra egészítik ki egymást. ⇒ Ha valamelyik szöge 90°-os, akkor a többi is. ⇒ A négyszög téglalap.

691. $AC = BD \Rightarrow AM = BM = CM = DM \Rightarrow$ Az ábrán egyformán jelölt szögek egyenlők. $360° = 4\varepsilon + 4\varphi$, ezért $\varepsilon + \varphi = 90° \Rightarrow ABCD$ téglalap.

692. Legyen a K középpontú kör két átmérője AB és CD.
$KA = KB = KC = KD$, mert a kör sugarai. $\Rightarrow AKC\triangle$; $CKB\triangle$; $BKD\triangle$ és $DKA\triangle$ egyenlő szárú ⇒ alapon fekvő szögeik egyenlők $\Rightarrow ACB\triangle$-ben $2\varepsilon + 2\varphi = 180°$, ezért $\varepsilon + \varphi = 90°$. Hasonlóan megmutatható, hogy az $ABCD$ négyszög minden szöge 90°, tehát téglalap.



693. Legyen az $ABCD$ téglalap átlóinak metszéspontja K, $KAB\sphericalangle = \varphi$ és $KBC\sphericalangle = \varepsilon$.
A téglalapot átlói két-két egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontják. $CKB\sphericalangle$ külső szöge az $AKB\triangle$-nek. $\Rightarrow CKB\sphericalangle = 2\varphi$. $AKB\sphericalangle$ külső szöge a $BCK\triangle$-nek. $\Rightarrow AKB\sphericalangle = 2\varepsilon$.

694. Legyen az átlók metszéspontja K. $BKC\sphericalangle = 2AKB\sphericalangle = 52°$.

695. 62° és 28°.

696. Legyen az $ABCD$ téglalap átlóinak metszéspontja K. *a)* $A_1D_1 = A_2D_2$; $A_1B_1 = A_2B_2$; $D_1A_1B_1\sphericalangle = 90° = D_2A_2B_2\sphericalangle \Rightarrow A_1B_1D_1\triangle \cong A_2B_2D_2\triangle$. $A_1B_1D_1\triangle$ középpontos tükörképe K_1-re $C_1D_1B_1\triangle$ és $A_2B_2D_2\triangle$ középpontos tükörképe K_2-re $C_2D_2B_2\triangle \Rightarrow A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$.
b) $C_1K_1 = C_2K_2$; $K_1B_1 = K_2B_2$; $C_1K_1B_1\sphericalangle = C_2K_2B_2\sphericalangle \Rightarrow C_1K_1B_1\triangle \cong C_2K_2B_2\triangle$. $C_iK_iB_i\triangle$ középpontos tükörképe K_i-re $A_iK_iD_i\triangle \Rightarrow A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$.
c) $A_1D_1 = A_2D_2$; $A_1C_1 = A_2C_2$; $C_1D_1A_1\sphericalangle = 90° = C_2D_2A_2\sphericalangle \Rightarrow A_1D_1C_1\triangle \cong A_2D_2C_2\triangle$. $A_iD_iC_i\triangle$ középpontos tükörképe K_i-re $C_iB_iA_i\triangle \Rightarrow A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$.

697. *a)* AB-től és DC-től egyenlő távolságra lévő pontok AB és DC középpárhuzamosán, EG-n vannak. AD-től és BC-től egyenlő távolságra lévő pontok AD és BC középpárhuzamosán, HF-n vannak. Mindegyik oldaltól egyenlő távolságra lévő pontok csak EG és HF közös pontjai lehetnek. Egy ilyen pont van: M, a téglalap középpontja. $MF = ME$ csakis akkor teljesül, ha a téglalap négyzet.
b) A megfelelő pont csakis az oldalfelező merőlegesek metszéspontja lehet, ami a téglalap középpontja. Ez egyúttal az átlók metszéspontja is, és mivel az átlók felezik egymást, ez a pont megfelelő.

698. Legyen az átlók metszéspontja K. $KC = KB \Rightarrow KCB\sphericalangle = KBC\sphericalangle = 60° \Rightarrow KBC\triangle$ egyenlő oldalú $\Rightarrow BC = KC = KB \Rightarrow 2BC = AC = BD$.

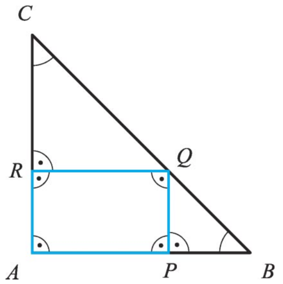
699. Legyen az átlók metszéspontja K. Az átlók egyenlő hosszúak és felezik egymást. $\Rightarrow$ $\Rightarrow KC = KB = AC/2 \Rightarrow KC = KB = BC \Rightarrow KBC\triangle$ minden szöge 60°.

700. Legyen CD felezőpontja F és $AF \perp FB$. Tengelyes szimmetria miatt $AF = FB$. $\Rightarrow FAB\sphericalangle =$ $= FBA\sphericalangle = 45° \Rightarrow DAF\sphericalangle = CBF\sphericalangle = 45° \Rightarrow AD = DF = FC = CB \Rightarrow AB = CD = 2AD$.
$K_{ABCD} = 2(AB + AD) \Rightarrow \underline{\underline{AD = 5\text{ cm}}}$ és $\underline{\underline{AB = 10\text{ cm}}}$.

701. $AB = AC \Rightarrow ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = 45° \Rightarrow PB = PQ$ és $RQ = RC \Rightarrow k_{APQR} = 2(AP + PQ) =$ $= 2(AP + PB) = 2AB$ a Q helyétől függetlenül.

702. P rajta van α szögfelezőjén $\Rightarrow$ d(P; AD) = d(P; AB) és P rajta van δ szögfelezőjén $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ d(P; AD) = d(P; DC), ezért d(P; AB) = d(P; DC) $\Rightarrow P$ rajta van az EF középvonalon. Hasonlóan R is rajta van EF-en, Q és S pedig a GH középvonalon. $\Rightarrow EDP\sphericalangle = PDC\sphericalangle = DPE\sphericalangle$ (szögfelezés és váltószögek) $\Rightarrow b/2 = ED = EP$. Hasonlóan belátható, hogy $b/2 = RF = FC$. $PR = EF - ED - RF = a - b/2 - b/2 = a - b$.

701.

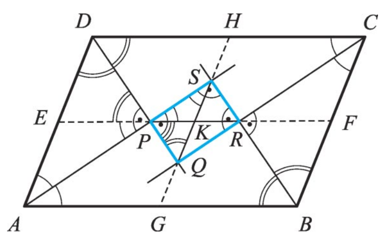


703. A szerkesztés: ① a-t középpontosan tükrözzük K-ra: a'. ② $a' \cap c = C$. ③ C-t középpontosan tükrözzük K-ra: A. ④ K középpontú, KA sugarú kör: k. ⑤ $k \cap b = B$. ⑥ B-t középpontosan tükrözzük K-ra: D. 0; 1; 2 vagy végtelen sok megoldás lehet.

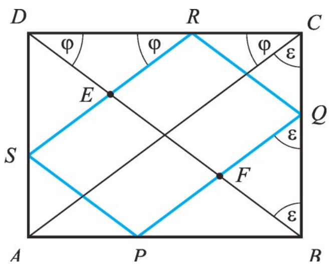
704. Középpontos szimmetria miatt $ER = FP$; $RQ = PS$ és $QF =$ $= SE$. A párhuzamosságok miatt egyállású és váltószögek keletkeznek, ezért az ábrán az egyformán jelölt szögek egyenlők és $QR = EF$. $\Rightarrow k_{PQRS} = 2(FQ + QR + RE) = 2(BF + FE + ED) = 2BD$.

705. G tengelyes tükörképe DC egyenesre G', ezért $CG' \parallel AE$ és $CAB\sphericalangle = G'FC\sphericalangle$ (egyállásúak) $\Rightarrow E$; F; G' egy egyenesen van és $EG' \parallel AC$. $\Rightarrow EA = G'C = CG \Rightarrow E$ középpontos tükörképe K-ra

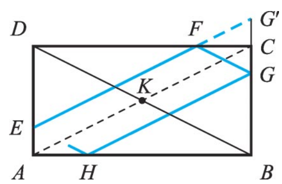
702.



704.

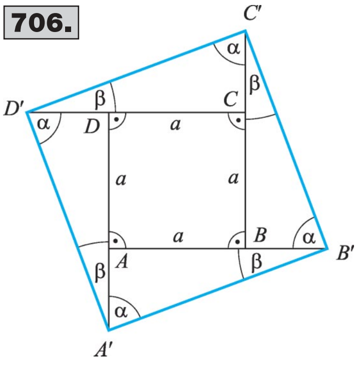


705.

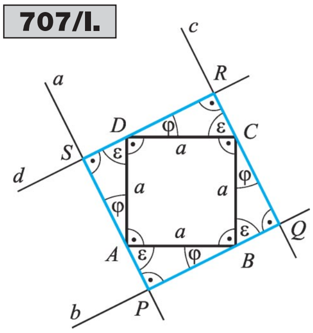


I

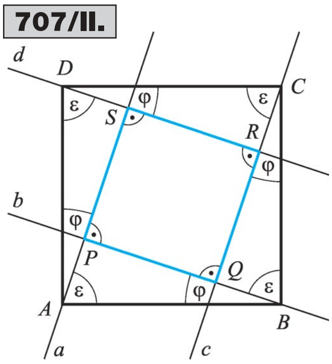
706.



707/I.



707/II.



$G \Rightarrow G$-ből AB-ről visszaverődve E-be érkezik a golyó $\Rightarrow F$ középpontos tükörképe K-ra $H \Rightarrow$ $\Rightarrow EFGH$ paralelogramma, amelynek kerülete a 704. feladat szerint független E helyzetétől.

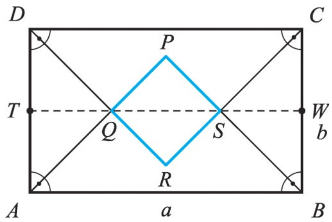
706. $\alpha + \beta = 90°$, mert $AA'B'\triangle$ derékszögű. $AA'B'\triangle \cong BB'C'\triangle \cong CC'D'\triangle \cong DD'A'\triangle$, mert a derékszöget közrefogó oldalaik: b és $(a+b)$. $\Rightarrow A'B' = B'C' = C'D' = D'A' \Rightarrow A'B'C'D'$ négyzet.

707. $PQRS$ négyszög minden szöge 90°, ezért téglalap. $\varepsilon + \varphi = 90°$.
$APB\triangle \cong BQC\triangle \cong CRD\triangle \cong DSA\triangle$, mert szögeik egyformák, átfogójuk egyenlő $\Rightarrow AP = BQ =$ $= RC = DS$ és $PB = QC = RD = SA$.
1. eset: $PB + BQ = QC + CR = RD + DS = SA + AP$, vagyis $PQ = QR = RS = SP \Rightarrow PQRS$ négyzet.
2. eset: $PB - BQ = QC - CR = RD - DS = SA - AP \Rightarrow PQ = QR = RS = SP \Rightarrow PQRS$ négyzet.

708. Legyen az $ABC\triangle$-ben $f_\gamma \cap AB = D$. AD-ből húzott párhuzamosok metszéspontja a befogókkal E és F. $DF \parallel AC \Rightarrow DF \perp BC$ és $DE \parallel BC \Rightarrow DE \perp AC$, ezért $CEDF$ minden szöge 90°. CD szögfelező, ezért $FCD\sphericalangle = DCE\sphericalangle = 45° \Rightarrow FC = FD$, valamint $CE = ED$, azaz a $CEDF$ téglalap szomszédos oldalai egyenlők. $\Rightarrow CEDF$ négyzet.

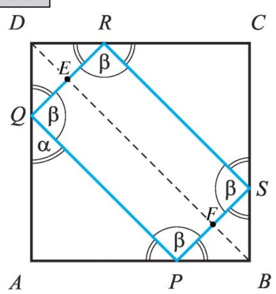
709. Az AC átló fölé rajzolt $ACEF$ négyzet tartalmazza a B csúcsot. AC az $ABCD$ négyzet átlója, ezért $ACB\sphericalangle = 45° \Rightarrow CB$ egyenes az $ACEF$ négyzet átlóegyenese, ezért átmegy F-en. (Hasonlóan belátható, hogy AB is átmegy F-en.) A négyzet átlói felezik egymást. $\Rightarrow CF = 2CB \Rightarrow \underline{\underline{CF = 2a}}$.

710.



710. A téglalap szögfelezői 45°-os szögeket hoznak létre. $\Rightarrow$ $APB\triangle$-ben $APB\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$, $DRC\triangle$-ben $DRC\sphericalangle =$ $= 180° - 2 \cdot 45° = 90°$, $AQD\triangle$-ben $AQD\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 45° =$ $= 90° \Rightarrow PQR\sphericalangle = 90° \Rightarrow PQRS$ téglalap. Az ábra szimmetrikus a téglalap szimmetriatengelyeire, vagyis QS-re és PR-re. $\Rightarrow$ $\Rightarrow QP = QR = RS = SP \Rightarrow PQRS$ négyzet. QS szimmetriatengely $\Rightarrow$ TW középvonal $\Rightarrow$ $TW = a$ és $TW \perp AD$, illetve $TW \perp BC \Rightarrow AT = TQ = b/2 = WB = SW \Rightarrow \underline{\underline{QS = a - b}}$.

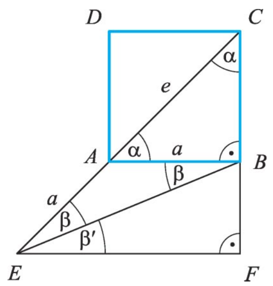
711.



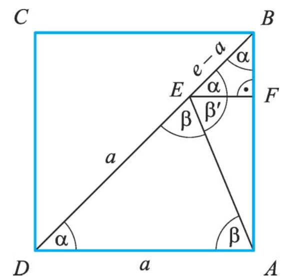
711. $AP = AQ = CS = CR \Rightarrow PB = BS = DR = DQ \Rightarrow \alpha =$ $= 45° \Rightarrow \beta = 90° \Rightarrow$ $\underline{\underline{PQRS \text{ téglalap}}}$. DB átló szintén 45°-ban hajlik az oldalakhoz. $\Rightarrow DB \parallel QP \parallel RS$, ezért $EF = QP = RS$. 45°-os szögek miatt $QE = DE$ és $PF = FB$ és $SF = FB \Rightarrow k_{PQRS} =$ $= \underline{\underline{2DB = \text{állandó}}}$.

I

713/I.



713/II.



712. A szerkesztés: ① $AC = e$. ② AC felezőmerőlegese. ③ AC felezőpontjából $e/2$ sugarú kör, kimetszi a felezőmerőlegesből B-t és D-t. Egyértelmű a megoldás.

713. *a)* Hosszabbítsuk meg AC-t a-val. $\Rightarrow AB = AE$. $\alpha = 45° \Rightarrow \beta = 22{,}5°$. $EF \perp CB \Rightarrow \beta' = 22{,}5°$ és $EF = FC$. A szerkesztés: ① $(e + a)$ átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög: $ECF\triangle$. ② egyik hegyesszögének szögfelezője kimetszi a szemközti befogóból B-t. ③ $BC = a$ oldalú négyzet. Egyértelmű a megoldás.

b) BD átlóra a-t felmérve kapjuk E-t. $EF \perp BF \Rightarrow \alpha = 45°$. $DE = DA \Rightarrow \beta = 67{,}5° \Rightarrow \beta' = 67{,}5°$. A szerkesztés: ① $(e - a)$ átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög: $EFB\triangle$. ② egyik hegyesszög külső szögének szögfelezője kimetszi a szemközti befogó egyeneséből A-t. ③ $BA = a$ oldalú négyzet. Egyértelmű a megoldás.

714. A szerkesztés: ① f-et tengelyesen tükrözzük e-re: f'. ② $f' \cap g = B$. ③ B-t tengelyesen tükrözzük e-re: D. ④ BD felezőpontja: F. ⑤ F középpontú, FB sugarú kör: k. ⑥ $k \cap e = \{A; C\}$. 0; 1 vagy végtelen sok megoldás lehet.

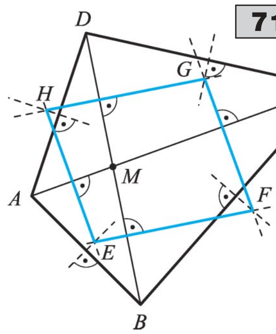
Négyszögekről általában

715. A háromszög köré írt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. E és H rajta van AM oldalfelező merőlegesén $\Rightarrow EH \perp AC$. F és G rajta van CM oldalfelező merőlegesén $\Rightarrow FG \perp AC \Rightarrow \underline{EH \parallel FG}$. Hasonlóan látható be, hogy $\underline{GH \parallel EF}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $EFGH$ paralelogramma.

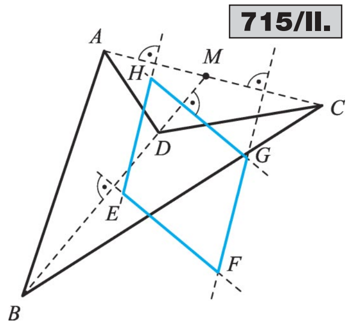
716. $BC \parallel EF \Rightarrow DC \parallel EF$ és $AC \parallel ED \Rightarrow FC \parallel ED$, tehát $CFED$ paralelogramma. $\Rightarrow \underline{CF = DE}$

$\alpha/2 = CAD\sphericalangle = ADE\sphericalangle$, mert váltószögek $\Rightarrow ADE\sphericalangle = EAD\sphericalangle \Rightarrow \underline{AE = DE}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $\underline{\underline{CF = AE}}$.

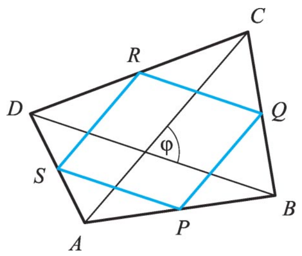
715/I.



715/II.



717.



717. RS középvonal $ACD\triangle$-ben $\Rightarrow RS \parallel AC$ és $RS = AC/2$. PQ középvonal $ACB\triangle$-ben $\Rightarrow PQ \parallel AC$ és $PQ = AC/2$. SP középvonal $BDA\triangle$-ben $\Rightarrow SP \parallel BD$ és $SP = BD/2$. RQ középvonal $BDC\triangle$-ben $\Rightarrow$ $\Rightarrow RQ \parallel BD$ és $RQ = BD/2$. $RS = QP = 13{,}5$ cm; $SP = RQ =$ $= 9{,}5$ cm; $RSP\sphericalangle = RQP\sphericalangle = \varphi = 63°42'$; $SRQ\sphericalangle = SPQ = 180° -$ $- \varphi = 116°18'$.

718. Legyenek az AB, BC, CD és DA oldak felezőpontjai rendre F_1, F_2, F_3 és F_4. F_1F_2 középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow F_1F_2 = \dfrac{AC}{2}$ és $F_1F_2 \parallel AC$. F_3F_4 középvonal az $ACD\triangle$-ben $\Rightarrow F_3F_4 = \dfrac{AC}{2}$ és $F_3F_4 \parallel AC$. A két következményt összevetve: $F_1F_2 = F_3F_4$ és $F_1F_2 \parallel F_3F_4$. Hasonlóan megmutatható, hogy $F_1F_4 = F_2F_3$ és $F_1F_4 \parallel F_2F_3$.

719. F_1 felezi AB-t, F_2 felezi BC-t $\Rightarrow F_1F_2$ középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow F_1F_2 = \dfrac{AC}{2}$ és $F_1F_2 \parallel AC$. F_3 felezi DC-t, F_4 felezi AD-t $\Rightarrow F_3F_4$ középvonal az $ADC\triangle$-ben $\Rightarrow F_3F_4 = \dfrac{AC}{2}$ és $F_3F_4 \parallel AC$. A két következményt összevetve $F_1F_2 = F_3F_4$ és $F_1F_2 \parallel F_3F_4 \Rightarrow F_1F_2F_3F_4$ paralelogramma.

720. F_4 felezi AD-t, F_2 felezi BD-t $\Rightarrow F_2F_4$ középvonal az $ABD\triangle$-ben $\Rightarrow F_2F_4 = \dfrac{AB}{2}$ és $F_2F_4 \parallel AB$. F_1 felezi AC-t, F_3 felezi BC-t $\Rightarrow F_1F_3$ középvonal az $ABC\triangle$-ben $\Rightarrow F_1F_3 = \dfrac{AB}{2}$ és $F_1F_3 \parallel AB$. A két következményt összevetve $\Rightarrow F_4F_2F_3F_1$ paralelogramma.

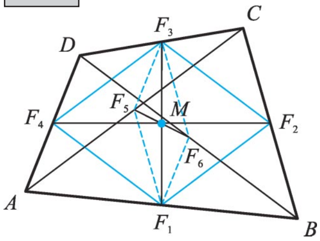
721. $F_1F_2F_3F_4$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow$ átlói felezik egymást $\Rightarrow F_1F_3 \cap F_2F_4 = M$ felezi F_1F_3-at és F_2F_4-et. A 720. feladat állítása szerint $F_1F_6F_3F_5$ négyszög paralelogramma, ezért átlói felezik egymást, tehát az F_5F_6 átlónak át kell mennie az F_1F_3 átló M felezéspontján, ami éppen a bizonyítandó állítást jelenti.

722. Legyenek a deltoid oldalfelező pontjai E, F, G és H. $EFGH$ egy olyan paralelogramma, aminek oldalai párhuzamosak a deltoid átlóival. Mivel a deltoid átlói merőlegesek egymásra, $EFGH$ téglalap.

723. Legyenek az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjai E, F, G és H. $EFGH$ paralelogramma, aminek oldalai párhuzamosak a négyszög átlóival. Akkor lesz téglalap, ha szomszédos oldalai merőlegesek egymásra. $\Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow$ A négyszög oldalfelező pontjai akkor alkotnak téglalapot, ha a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

724. Legyenek a négyszög AB, BC, CD és DA oldalainak felezőpontjai rendre E, F, G és H. EF; FG; GH; HE középvonalak egy-egy háromszögben, ezért $EF \parallel GH \parallel AC$ és $EF = GH =$ $= AC/2$, illetve $FG \parallel EH \parallel BD$ és $FG = EH = BD/2$. Ha $AC = BD$, akkor $EF = FG = GH = HE$, vagyis $EFGH$ rombusz.

721.



725. Legyenek a négyszög AB, BC, CD és DA oldalainak felezőpontjai rendre E, F, G és H. EF; FG; GH; HE középvonalak egy-egy háromszögben, ezért $EF \parallel GH \parallel AC$ és $EF = GH =$ $= AC/2$, illetve $FG \parallel EH \parallel BD$ és $FG = EH = BD/2. \Rightarrow EFGH$ négyszög szomszédos oldalai merőlegesek egymásra és egyenlő hosszúak. $EFGH$ négyzet.

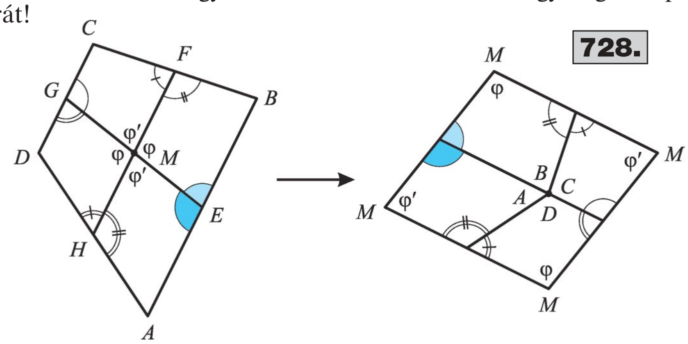
726. Legyenek a paralelogramma AB, BC, CD és DA oldalainak felezőpontjai rendre E, F, G és H. EF; FG; GH; HE középvonalak egy-egy háromszögben, ezért $EF \parallel GH \parallel AC$ és $EF = GH = AC/2$, illetve $FG \parallel EH \parallel BD$ és $FG = EH = BD/2$.

I

a) $EFGH$ téglalap $\Rightarrow EF \perp FG \Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow ABCD$ rombusz. *b)* $EFGH$ rombusz $\Rightarrow EF = FG \Rightarrow$ $\Rightarrow AC = BD \Rightarrow ABCD$ téglalap. *c)* $EFGH$ négyzet $\Rightarrow EFGH$ téglalap is, rombusz is $\Rightarrow ABCD$ rombusz is, téglalap is $\Rightarrow ABCD$ négyzet.

727. Legyenek az $ABCD$ négyszög oldalainak oldalfelező pontjai rendre E, F, G és H. $EFGH$ paralelogramma, ezért átlói felezik egymást, és az átlói az $ABCD$ négyszög középvonalai.

728. Lásd az ábrát!



728.

729. Legyenek a négyszög AB, BC, CD és DA oldalainak oldalfelező pontjai rendre E, F, G és H. $EFGH$ paralelogramma átlói az $ABCD$ négyszög középvonalai. $EG = HF \Leftrightarrow EFGH$ téglalap $\Leftrightarrow EF \perp FG \Leftrightarrow AC \perp BD$.

730. Legyenek a négyszög AB, BC, CD és DA oldalainak oldalfelező pontjai rendre E, F, G és H. $EFGH$ paralelogramma átlói az $ABCD$ négyszög középvonalai. $EG \perp FH \Leftrightarrow EFGH$ rombusz $\Leftrightarrow EF = FG \Leftrightarrow \underline{\underline{AC = BD}}$.

731. Tükrözzük a négyszöget a vizsgált középvonalának egyik végpontjára! $CA' = BA$ és EF középvonala a $DA'A\triangle$-nek. $DCA'\triangle$-ben a háromszög-egyenlőtlenség: $DA' < DC + CA' = DC + AB \Rightarrow$ $\Rightarrow DA' = 2EF < DC + AB$, azaz $EF < (DC + AB)/2$. Az egyenlőség akkor áll fenn, ha $BC + CA' =$ $= DA'$, azaz $DC \parallel AB$. $\Rightarrow ABCD$ trapéz.

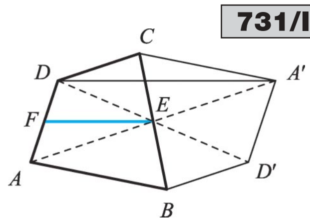
732. *a)* A szerkesztés: ① $BC = b$. ② B-ben β, C-ben $\gamma \rightarrow e$; f. ③ e-re $AB = a$ és f-re $DC = c$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

b) A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re $\rightarrow$ $\rightarrow e$; f. ③ f-re $BC = b$. ④ C-ből c sugarú kör: k. ⑤ $k \cap e =$ $= D$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

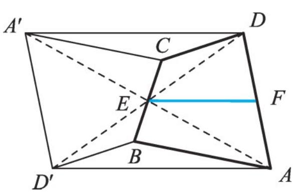
c) A szerkesztés: ① c; b; $e \rightarrow BCD\triangle$. ② B-ben β BC-re mindkét irányban $\rightarrow f_i$. ③ f_i-n $AB = a$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

d) A szerkesztés: ① a; b; $f \rightarrow ABC\triangle$. ② B-ből e sugarú kör: k_1. ③ C-ből c sugarú kör: k_2. ④ $k_1 \cap k_2 = D_i$. ⑤ a feltételeknek megfelelő $ABCD_i$ négyszög kiválasztása. 0; 1 vagy 2 megoldás van.

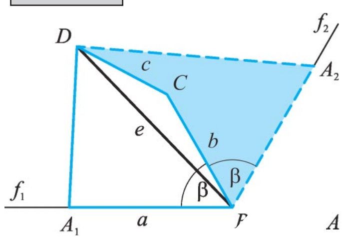
731/I.



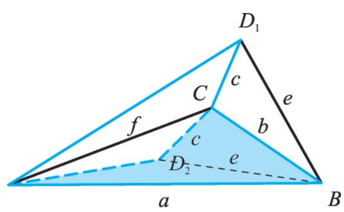
731/II.



732/I.

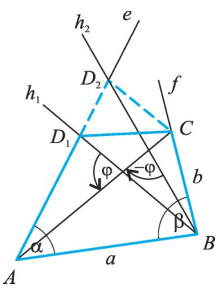


732/II.

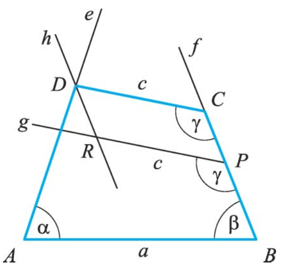


I

733.



735.



733. *a)* A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re → e; f. ③ f-en $BC = b$. ④ C-ben γ BC-re az A-val azonos félsíkban → g. ⑤ $g \cap e = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
b) A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re → f; g. ③ B középpontú, e sugarú kör: k. ④ $k \cap f = D$. ⑤ g-n $BC = b$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.
c) A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re → e; f. ③ f-en $BC = b$. ④ AC valamelyik pontjában egy-egy egyenes, ami AC-vel $+\varphi$, illetve $-\varphi$ szöget zár be: g_i. ⑤ B-n át g_i-vel párhuzamos: h_i. ⑥ $h_i \cap e = D_i$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.
734. *a)* A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re → f; g. ③ A középpontú, e sugarú kör: k_1. ④ $k_1 \cap g = C$. ⑤ C középpontú, c sugarú kör: k_2. ⑥ $k_2 \cap f = D$. 0; 1; 2; 3 vagy 4 megoldás lehet.
b) A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α az AB-re → h. ③ B középpontú, f sugarú kör: k_1. ④ $k_1 \cap h = D$. ⑤ DB valamelyik pontjában egy-egy egyenes, ami $+\varphi$, illetve $-\varphi$ szöget zár be DB-vel: g_i. ⑥ A-n át párhuzamos g_i-vel: j_i. ⑦ D középpontú, c sugarú kör: k_2. ⑧ $j_i \cap k_2 = C$. 0-tól 8-ig terjedhet a megoldások száma.

735. A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re → e; f. ③ F tetszőleges P pontjában g félegyenes, amire $\sphericalangle(BP; g) = \gamma$. ④ g-n $PR = c$. ⑤ R-en át párhuzamos f-fel: h. ⑥ $h \cap e = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

Trapézok

736. $AD_1D\triangle$ és $BD_2C\triangle$ egyenlő szárú, mert szögeik: 90°, 45°, 45° ⇒ $c = 6$ cm.

737. A trapéz két szöge 107° és 72°.

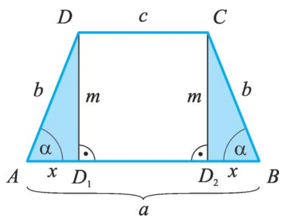
738. $2AT = AD$, mert $\alpha = 60°$. A szimmetria miatt $SB = AT$. $AB = AT + TS + SB$, azaz $a = b/2 + b + b/2 = 2b$.

739. A trapéz középvonala az alapok számtani közepe: $k = 11{,}5$ cm.

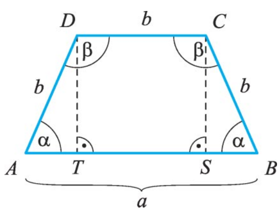
740. A trapéz középvonala az alapok számtani közepe: $c = 22$ cm.

741. A trapéz középvonala az alapok számtani közepe: $k = 10{,}5$ cm $> 10{,}4$ cm, ezért a párhuzamos a rövidebb alaphoz van közelebb.

736.



738.



742. $DE \parallel CB \Rightarrow DC = EB$. GH középvonal $\Rightarrow 2GH = AE + 2DC \Rightarrow$ $DC = 12$ cm $\Rightarrow$ $AB = 14$ cm.

743. $\alpha = 60° \Rightarrow ABD\sphericalangle = 30°$ és $AB = 2AD = 10$ cm. $\beta = 180° - \alpha = 120°$ és $DBC\sphericalangle = 30°$ és $CDB\sphericalangle = \beta - 90° = 30° \Rightarrow DC = CB = 5$ cm. A trapéz oldalai: 5 cm, 5 cm, 5 cm és 10 cm.

744. *a)* 39°12′; 39°12′; 140°48′; 140°48′. *b)* $\alpha = (180° - \varphi)/2 = 69° \Rightarrow \beta = 111°$.

745. E_2F_2 az $ABCD$ trapéz középvonala $\Rightarrow E_2F_2 \parallel AB \parallel CD \Rightarrow ABF_2E_2$ és E_2F_2CD trapéz, és ezek középvonalai E_1F_1, illetve E_3F_3. $E_2F_2 = (AB + CD)/2 = 13$ cm, $E_1F_1 = (AB + E_2F_2)/2 =$ $= 15$ cm, $E_3F_3 = (E_2F_2 + CD)/2 = 11$ cm.

746. Legyen EF a trapéz középvonala és $EF \cap AC = M$. $EF \parallel AB$ és F a BC felezőpontja $\Rightarrow MF$ az $ABC\triangle$ középvonala $\Rightarrow$ $MF = AB/2$. Hasonlóan megmutatható, hogy $EM = CD/2$.

747. Legyen EF a trapéz középvonala és $EF \cap AC = K$ és $EF \cap BD = L$. $EF \parallel AB \parallel CD$; E az AD felezőpontja; F a BC felezőpontja $\Rightarrow EK$ középvonal az $ACD\triangle$-ben és LE középvonal a $BAD\triangle$-ben $\Rightarrow EK = DC/2$ és $LE = AB/2 \Rightarrow KL = EL - EK = (AB - DC)/2$.

748. Legyen AC felezőpontja K, BD felezőpontja L, valamint a KL egyenes metszéspontja AD-vel E, BC-vel F. $AK = KC$ és $BL = LD \Rightarrow KL$ része az $ABCD$ trapéz középvonalának. $\Rightarrow$ Párhuzamos az alapokkal. EK középvonala $ADC\triangle$-nek, ezért $EK = DC/2$, valamint EL középvonala $ADB\triangle$-nek, ezért $EL = AB/2 \Rightarrow KL = EL - EK = (AB - DC)/2$.

749. Az EF középvonal az M pontban metszi az AC átlót. EF középvonal, ezért $EF \parallel DC$. E az AD felezőpontja, ezért EM az $ADC\triangle$ középvonala. $\Rightarrow M$ felezi AC átlót.

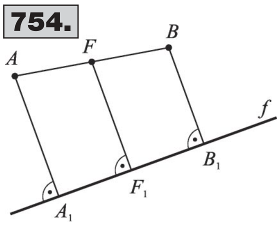
750. Legyen az átlók metszéspontja M. A feladat szerint M felezőpontja AC-nek, illetve BD-nek, ezért $ABCD$ középpontosan szimmetrikus M-re, tehát paralelogramma $\Rightarrow$ $DC = AB$.

751. A feladat szerint EF középvonal átmegy az átlók M metszéspontján $\Rightarrow EM$ középvonala az $ADC\triangle$-nek, ezért $EM = DC/2$, valamint EM középvonala az $ABD\triangle$-nek, ezért $EM = AB/2 \Rightarrow$ $\Rightarrow DC = AB$, valamint $AB \parallel DC$, tehát $ABCD$ paralelogramma.

752. Az $ABCD$ trapézban $CD = a$, EF középvonal és $EF \cap AC = K$ és $EF \cap BD = L$. EK középvonala az $ADC\triangle$-nek, ezért $EK = DC/2$, valamint LF középvonala a $BDC\triangle$-nek, ezért $LF =$ $= DC/2 \Rightarrow EK = LF = a/2$. A feladat szerint $EK = KL = LF$, ezért $KL = a/2$. Az EF középvonal az AB és CD alapok számtani közepe: $\dfrac{a+b}{2} = 3 \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow b = 2a$.

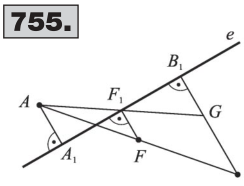
753. Az $ABCD$ trapéz EF középvonalának metszéspontja AC-vel K, DB-vel L. EF az $ABCD$ középvonala $\Rightarrow EK$ középvonala az $ADC\triangle$-nek, ezért $EK = a/2$, valamint LF középvonala a $BDC\triangle$-nek, ezért $LF = a/2 \Rightarrow EF = \dfrac{2a + a}{2} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow KL = EF -$ $- EK - LF = a/2 \Rightarrow$ $EK = KL = LF$.

754.



754. $AA_1 = 5$ km és $BB_1 = 4$ km. $AF + FF_1 = BF + FF_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow AF = FB$. FF_1 akkor a legrövidebb, ha merőleges f-re. Ekkor $AA_1 \parallel FF_1 \parallel BB_1 \Rightarrow ABB_1A_1$ trapéz, aminek középvonala FF_1. $\Rightarrow FF_1 =$ $= (BB_1 + AA_1)/2 = 4{,}5$ km $= 4500$ m.

755.

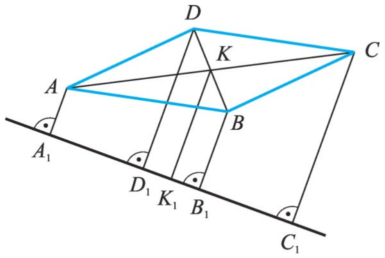


755. **1. eset:** Az egyenes nem választja el A-t és B-t. A 754. ábra jelöléseit használjuk.
$AA_1 = 10$ cm és $FF_1 = 8$ cm. $AA_1 \parallel FF_1 \parallel BB_1 \perp e \Rightarrow ABB_1A_1$ trapéz, aminek középvonala FF_1. $\Rightarrow FF_1 = (BB_1 + AA_1)/2 \Rightarrow$ $BB_1 = 6$ cm.

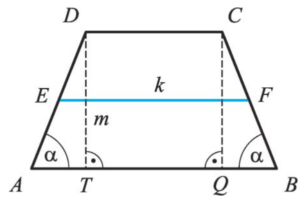
2. eset: Az egyenes elválasztja A-t és B-t. (755. ábra) $AA_1 = 10$ cm és $FF_1 = 8$ cm. $AA_1 \parallel FF_1 \parallel BB_1 \perp e \Rightarrow FF_1$ középvonala az $ABG\triangle$-nek. $\Rightarrow BG = 16$ cm és $AF_1 = F_1G \Rightarrow AF_1A_1\triangle \cong GF_1B_1\triangle \Rightarrow B_1G =$ $= 10$ cm $\Rightarrow BB_1 = BG + GB_1 = 26$ cm.

I

756.



757.



756. $AA_1 = 6$ cm, $DD_1 = 9$ cm, $KK_1 = 7$ cm. AA_1CC_1 trapéz, aminek középvonala $KK_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2KK_1 = AA_1 + CC_1 \Rightarrow \underline{\underline{CC_1 = 8\text{ cm}}}$. DD_1BB_1 trapéz, aminek középvonala $KK_1 \Rightarrow 2KK_1 =$ $= DD_1 + BB_1 \Rightarrow \underline{\underline{BB_1 = 5\text{ cm}}}$.

757. $AB = a$ és $CD = c$. $\alpha = 45° \Rightarrow ATD\triangle$ és $BQC\triangle$ egyenlő szárú, ezért $AT = TD = m$ és $QB = QC = m \Rightarrow a = AB = AT + TQ + QB = 2m + c$. Középvonal: $2k = a + c = (2m + c) + c =$ $= 2(m + c) \Rightarrow \underline{\underline{c = k - m \text{ és } a = k + m}}$.

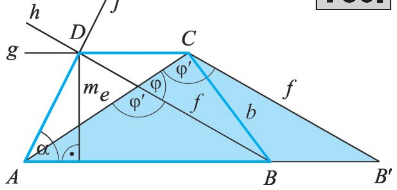
758. *a)* A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re $\rightarrow$ e; f. ③ AB-vel párhuzamos m távolságra: g. ④ $e \cap g = D$ és $f \cap g = C$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
b) A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban α, B-ben β az AB-re $\rightarrow e$; f. ③ F-en $BC = b$. ④ C-ben párhuzamos AB-vel: g. ⑤ $e \cap g = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
c) A szerkesztés: ① a; e; $\beta \rightarrow ABC\triangle$. ② C-ben párhuzamos AB-vel: f. ③ A-ban α az AB-re $\rightarrow g$. ④ $f \cap g = D$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

759. *a)* $CC' \parallel AD \Rightarrow C'B = a - c$. **1. eset:** Ha $C' \equiv B$, akkor $ABCD$ paralelogramma.
2. eset: $C' \not\equiv B$. A szerkesztés: ① $a - c$; α; $\beta \rightarrow C'BC\triangle$. ② BC' meghosszabbítása C'-n túl c-vel $\rightarrow A$. ③ C-n át párhuzamos AB-vel: e. ④ C középpontú, c sugarú kör: k. ⑤ $k \cap e = D$. 0 vagy 1 megoldás van.
b) A szerkesztés: ① két párhuzamos egymástól m távolságra: e és f. ② e-n $AB = a$. ③ A-ban α az AB-re: g. ④ $g \cap f = D$. ⑤ D-ből f-re c hosszúságú szakasz α szögtartományában $\rightarrow C$. Egyértelmű a megoldás.
c) A szerkesztés: ① a; f; $\alpha \rightarrow ABD\triangle$. ② D-ben párhuzamos AB-vel: e. ③ D-ből e-n c hosszúságú szakasz α szögtartományában $\rightarrow C$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.
d) A szerkesztés: ① $\alpha' = 180° - \alpha$. ② e; c; $\alpha' \rightarrow ACD\triangle$. ③ A-ból párhuzamos DC-vel: f félegyenes. ④ A középpontú, a sugarú kör: k. ⑤ $k \cap f = B$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

e) DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CD'. A szerkesztés: ① $a + c$; e; $f \rightarrow AD'C\triangle$. ② A-ból a hosszúságú szakasz AD'-n $\rightarrow B$. ③ B-n át párhuzamos $D'C$-vel: g. ④ C-n át párhuzamos AB-vel: h. ⑤ $g \cap h = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
f) A szerkesztés: ① két párhuzamos egymástól m távolságra: g és h. ② g-n $AB = a$. ③ B középpontú, f sugarú kör: k. ④ $k \cap h = D_i$. ⑤ h-n D_i-ből c hosszúságú szakasz az AD által határolt B-t tartalmazó félsíkban: C_i. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

760. *a)* DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CB', $\varphi' = 180° - \varphi$. A szerkesztés: ① e; f; $\varphi' \rightarrow AB'C\triangle$. ② C középpontú, b sugarú kör: k. ③ $k \cap AB' = B_i$. ④ B_i-n át párhuzamos CB'-vel: h_i. ⑤ C-n át párhuzamos AB'-vel: g. ⑥ $h_i \cap g = D_i$. ⑦ Ha $\varphi \neq 90°$, akkor másik megoldáshoz juthatunk az 1–5. lépések során az e; f; φ-ből szerkesztett $AB'C\triangle$-ből kiindulva. A megoldások száma 0-tól 4-ig változhat.

760.

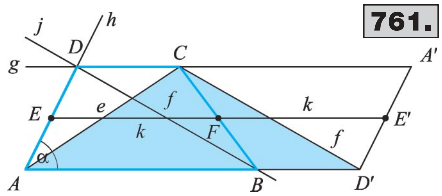


b) DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CB'. A szerkesztés: ① e; f; $m \rightarrow$ $\rightarrow AB'C\triangle$. ② C-n át párhuzamos AB'-vel: g. ③ AB'-re

A-ból a hosszúságú szakasz → B. ④ B-n át párhuzamos CB'-vel: h. ⑤ $g \cap h = D$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

c) DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CB', $\varphi' = 180° - \varphi$. A szerkesztés: ① e; f; φ' → $AB'C\triangle$. ② C-n át párhuzamos AB'-vel: g. ③ A-ban α AB-re: j. ④ $g \cap j = D$. ⑤ D-n át párhuzamos CB'-vel: h. ⑥ $h \cap AB' = B$. ⑦ Ha $\varphi \neq \varphi'$, akkor az 1–6. lépéseket φ' helyett φ-vel végrehajtva másik megoldáshoz jutunk. 1 vagy 2 megoldás lehet.

761.



d) DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CB'. A szerkesztés: ① e; f; m → $AB'C\triangle$. ② A-ban AB-re α: j. ③ C-n át párhuzamos AB'-vel: g. ④ $g \cap j = D$. ⑤ B'-t eltoljuk $\overrightarrow{CD}$-ral: B. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

761. *a)* $AD' = 2k$. A szerkesztés: ① $2k$; e; f → $AD'C\triangle$. ② C-n át párhuzamos AD'-vel: g. ③ A-ban α AD'-re: h. ④ $g \cap h = D$. ⑤ D-n át párhuzamos CD'-vel: j. ⑥ $j \cap AD' = B$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

b) $AD' = 2k$. A szerkesztés: ① $2k$; e; f → $AD'C\triangle$. ② C-n át párhuzamos AD'-vel: g. ③ A középpontú, d sugarú kör: k. ④ $k \cap g = D$. ⑤ D-n át párhuzamos CD'-vel: j. ⑥ $j \cap AD' = B$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

762. Legyenek a trapéz alapjai $AB > CD$. Húzzunk párhuzamost D-n át BC-vel! Ez AB-t metszi E-ben. **1. eset:** Ha $E \not\equiv A$, akkor $DE = CB$; $AE = AB - EB = AB - DC$. $ADE\triangle$-re a háromszög-egyenlőtlenség: $AD + DE > AE$, azaz $AD + BC > AB - DC$.

2. eset: Ha $E \equiv A$, akkor $ABCD$ paralelogramma, az alapok különbsége 0, így igaz az állítás.

763. *a)* $AE = a - c$. **1. eset:** $a > c$. A szerkesztés: ① $a - c$; b; b → $AED\triangle$. ② D-n át párhuzamos AE-vel → g félegyenes. ③ g-n $DC = c$. ④ C-n át párhuzamos DE-vel: h. ⑤ $h \cap e(A; E) = B$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

2. eset: Ha $a = c$, akkor $ABCD$ egy a és b oldalú téglalap. Egyértelmű a megoldás.

b) A szerkesztés: ① $AB = a$. ② A-ban és B-ben ellentétes irányban α AB-re: j és h félegyenesek. ③ j-n $AD = b$ és h-n $BC = b$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

c) $AG = FB = (a - c)/2$. A szerkesztés: ① m; c → $GFCD$ téglalap. ② GF meghosszabbítása mindkét irányban $(a - c)/2$ hosszú szakasszal → A; B. Egyértelmű a megoldás.

d) A szerkesztés: ① a; b; e → $ABD\triangle$. ② D-n át párhuzamos AB-vel: g. ③ B középpontú, b sugarú kör: k. ④ $k \cap g = C_i$. ⑤ C_i kiválasztása úgy, hogy $C_iBA\sphericalangle = BAD\sphericalangle$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

e) DB eltoltja $\overrightarrow{DC}$-ral CC'. A szerkesztés: ① $a + c$; e; e → $AC'C\triangle$. ② AC'-n C'-ből $BC' = c$. ③ C-t eltoljuk $\overrightarrow{C'B}$-ral: D. 0 vagy 1 megoldás lehet.

764. Legyen a trapéz $AB > CD$ alapjaira merőleges szára AD, és C merőleges vetülete AB-re E.

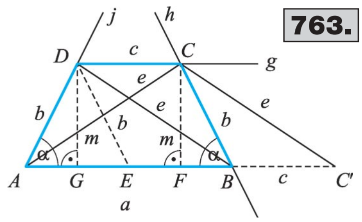
a) A szerkesztés: ① $AD = m$. ② A-ban és D-ben merőleges AD-re azonos félsíkban: g, h. ③ g-n $AB = a$. ④ h-n $DC = c$. Egyértelmű a megoldás.

b) $AE = c \Rightarrow EB = a - c$. A szerkesztés: ① 90°; $a - c$; b → $CEB\triangle$. ② EB-t meghosszabbítjuk E-n túl: $BA = a$. ③ A-ban merőleges AB-re: g. ④ C-n át párhuzamos AB-vel: h. ⑤ $g \cap h = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

c) $AE = c \Rightarrow EB = a - c$. A szerkesztés: ① 90°; $a - c$; α → $CEB\triangle$. ② EB-t meghosszabbítjuk E-n túl: $BA = a$. ③ A-ban merőleges AB-re: g. ④ C-n át párhuzamos AB-vel: h. ⑤ $g \cap h = D$. Egyértelmű a megoldás.

765. Legyenek a trapéz alapjai: $AB > CD$. Az A pontban húzott szögfelező M pontban metszi a CD oldalt. $BAM\sphericalangle = AMD\sphericalangle$, mert váltószögek, így $AMD\sphericalangle = DAM\sphericalangle \Rightarrow AMD\triangle$ egyenlő szárú, vagyis $AD = DM \Rightarrow MC = DC - DM = CB \Rightarrow CMB\sphericalangle = MBC\sphericalangle$. $CMB\sphericalangle = MBA\sphericalangle$, mert váltószögek, tehát $MBC\sphericalangle = MBA\sphericalangle$, vagyis M rajta van a B csúcsnál levő szögfelezőn.

763.



I

Körök

Kör és egyenesek

766. Felvesszük a kör két nem párhuzamos AB és CD húrját. $f_{AB} \cap f_{CD} = K$ a kör középpontja.

767. F felezi AB-t, G felezi CD-t, valamint $d(K; AB) = d(K; F)$ és $d(K; CD) = d(K; G)$.
$AFK\triangle \cong DGK\triangle$, mert $AK = KD = r$, $AF = DG = h/2$ és mindkettő derékszögű. $\Rightarrow KG = KF$.

768. $A_1A_2 = B_1B_2 \Rightarrow d_1 = d_2 \Rightarrow a \parallel b$ miatt K rajta van az a és b egyenesek középpárhuzamosán. A középpárhuzamos minden pontja megfelelő.

769. $A_1A_2 = B_1B_2 \Rightarrow d_1 = d_2 \Rightarrow K$ rajta van $\sphericalangle(a;\ b)$ szögfelező egyenesein. Mindkét szögfelező minden pontja megfelelő.

770. A K középpontú kör AB húrjának felezőpontja F. Ha $h = 2r$, akkor $KF = 0$. Más esetben Pitagorasz-tétel az AFK derékszögű háromszögre: $AF = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$.

771. Pitagorasz-tétel az $AKF\triangle$-re, illetve a $CGK\triangle$-re: $AF = \sqrt{r^2 - FK^2}$ és $CG = \sqrt{r^2 - GK^2}$.
$AF = \sqrt{r^2 - FK^2} < \sqrt{r^2 - GK^2} = CG \Rightarrow AF < CG \Rightarrow AB < CD.$

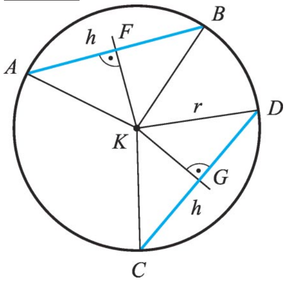
772. A háromszög oldalai a körülírt kör húrjai. Legyen AB a háromszög leghosszabb oldala. A 771. feladat állítása szerint a három húr közül AB van legközelebb a kör középpontjához.

773. Legyen AB a kör azon húrja, amelynek P a felezéspontja és $KP \perp AB$! A tetszőleges, P-re illeszkedő XY húr biztosan hosszabb AB-nél, hiszen a középponttól való távolsága kisebb PK-nál ($FKP\triangle$-ben FK befogó, PK átfogó). $\Rightarrow AB$ a legrövidebb húr. A leghosszabb húr a P-re illeszkedő átmérő, CD.

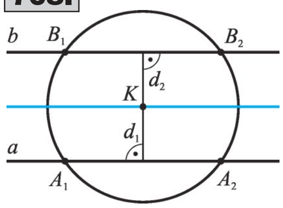
774. A 773. feladatban láttuk, hogy a K középpontú körben a P-n átmenő húrok közül legrövidebb a KP-re P-ben állított merőleges húr. A leghosszabb húr a KP egyenesének CD szakasza. $KP \perp AB$ miatt $CD \perp AB$.

775. P azt az AB húrt felezi, amely merőleges KP-re, hiszen $KAB\triangle$ egyenlő szárú, és KP súlyvonala egyúttal magasságvonal is.

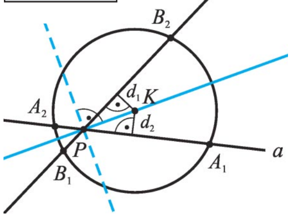
767.



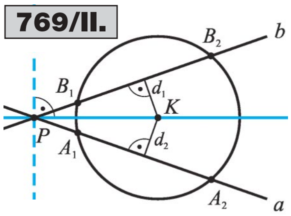
768.



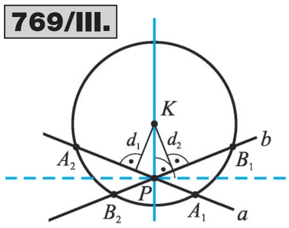
769/I.



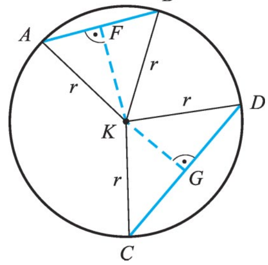
769/II.



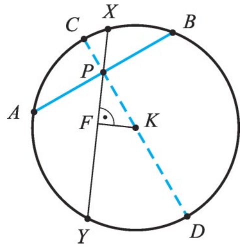
769/III.



771.



773.



776. A h hosszúságú húrok F felezéspontjai $d = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ távolságra vannak a kör középpontjától. $\Rightarrow$ Az F pontok egy K középpontú, d sugarú k' körön vannak. A k' kör bármely F pontjához tartozik egy h hosszúságú húr.
A keresett ponthalmaz a K középpontú, d sugarú k' kör.

777. A h hosszúságú húrok középpontjai K középpontú, $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ sugarú k' körön vannak. A keresett húrt megkaphatjuk, ha P-ből érintőt szerkesztünk a k' körhöz. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

778. Felhasználjuk: A h hosszúságú húrok középpontjai K középpontú, $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ sugarú k' körön találhatók, és a h hosszúságú húrok a k' kör érintői. A szerkesztés: ① K középpontú, $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ sugarú kör: k'. ② P-ből érintő k'-höz. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

779. Felhasználjuk: A kör sugara a szerkesztendő szabályos hatszög oldala. A szerkesztés: ① P ponton át r hosszúságú húr szerkesztése (a módszert lásd a 778. feladat megoldásánál) $\rightarrow$ $\rightarrow$ A; B. ② AB oldalú szabályos hatszög szerkesztése a körbe. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

780. **1. eset:** $AC \cap BD \neq K$. Húzzunk párhuzamost AC húrral a B ponton át! A párhuzamosnak k-val való másik metszéspontja E. Az $ACEB$ négyszög húrtrapéz, ezért AB ív és EC ív egyenlő hosszú ($i_1 = i_2$). Thalész-tétel megfordítása miatt DE a kör átmérője, ezért i_3 és CE ív együtt egy félkört alkot, azaz i_3 és i_1 ívek is félkört alkotnak együtt, és ezt akartuk belátni.
2. eset: $AC \cap BD = K \Rightarrow$ a keletkezett ívek egyenlő negyedkörök, tehát igaz az állítás.

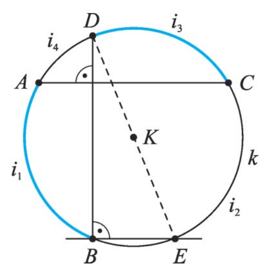
781. A szerkesztés: ① K-ból merőlegest állítunk e-re: f. ② $f \cap e = F$. ③ F-ből mindkét irányban $h/2$ hosszúságú szakasz felvétele az e egyenesen: G és H. ④ G-ben és H-ban merőleges e-re: g és h. ⑤ $g \cap k = M$ és $h \cap k = N$. ⑥ MN a keresett húr. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

782. A szerkesztés: ① a kör egy a hosszúságú húrjának kijelölése $\rightarrow A$; B. ② $e(A; K) \cap k = C$. ③ $e(B; K) \cap k = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.

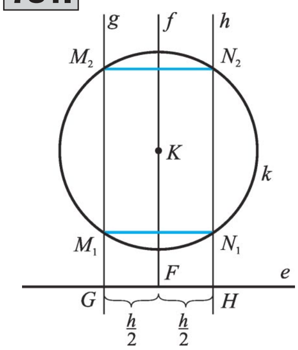
783. A szerkesztés: ① K ponton át e-vel $+45°$-os, illetve $-45°$-os szöget bezáró egyenesek: f; g. ② $f \cap k = \{A; C\}$ és $g \cap k = \{B; D\}$. $ABCD$ négyzet. Egyértelmű a megoldás.

784. A szerkesztés: ① P-ből merőlegest állítunk e-re $\rightarrow F$ pont. ② F-ből mindkét irányban $h/2$ hosszúságú szakasz felvétele az e egyenesen: A és B. ③ PA sugarú, P középpontú kör: k. Egyértelmű a megoldás.

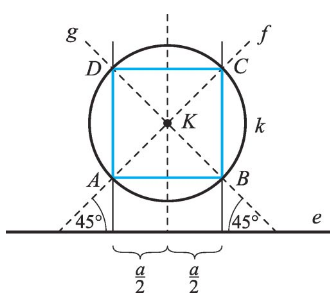
780.



781.

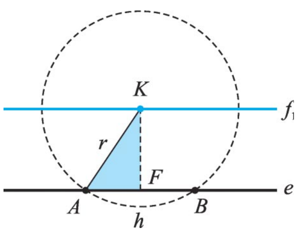


783.

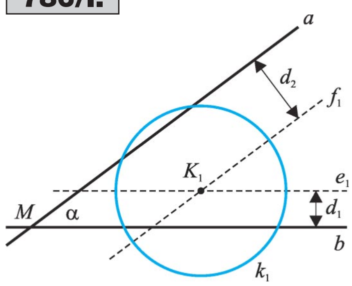


I

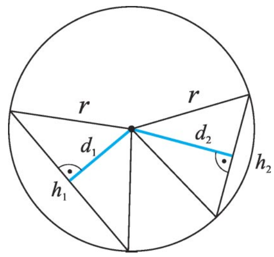
785.



786/I.



786/II.



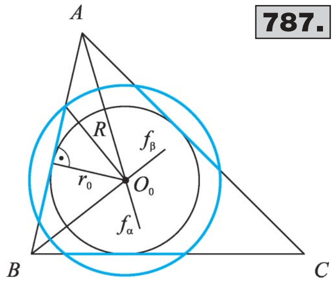
785. **1. eset:** $h < 2r$. Az e-ből h hosszúságú húrt kimetsző r sugarú körök középpontjaira fennáll az AFK derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel: $KF = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$. $KF = \mathrm{d}(K; e)$, tehát a körök középpontjai az e-vel párhuzamos $\sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ távolságra húzódó f_1 és f_2 egyenespáron vannak. f_1 és f_2 minden pontja megfelel a kívánt feltételeknek.
2. eset: $h = 2r$. Az e egyenes a keresett ponthalmaz.
3. eset: $h > 2r$. Nincs megoldás.

786. A keresett kör középpontja $d_1 = \sqrt{r^2 - \frac{h_1^2}{4}}$ távolságra van az egyik, és $d_2 = \sqrt{r^2 - \frac{h_2^2}{4}}$ távolságra van a másik egyenestől. A szerkesztés: ① a 786/II. ábra alapján d_1 és d_2 megszerkesztése. ② b-vel párhuzamos d_1 távolságra: e_1 és e_2. ③ a-val párhuzamos d_2 távolságra: f_1 és f_2. ④ Bármely e-nek bármely f-fel való metszéspontja egy megfelelő kör középpontja. ⑤ A kapott köröknek az α szögfelezőjére való tükrözésével újabb megoldásokat kapunk. 0; 4 vagy 8 megoldás lehet.

787. Felhasználjuk, hogy a keresett kör koncentrikus a háromszög beírt körével és sugara $R = \sqrt{r_0^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$. A szerkesztés: ① $f_\alpha \cap f_\beta = O_0$. ② O_0 középpontú, R sugarú kör. Egyértelmű a megoldás.

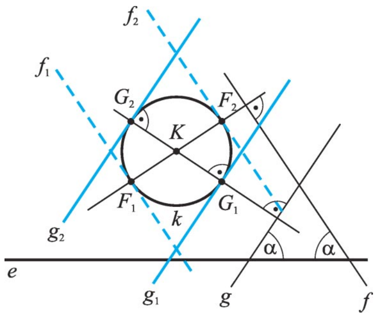
788. Felhasználjuk: A kör átmérője a szerkesztendő négyzet átlója. A szerkesztés: ① $2r$ átfogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög szerkesztése → a, a négyzet oldala. ② P ponton át a hosszúságú húr szerkesztése (a módszert lásd a 778. feladat megoldásánál) → A; B. ③ AB oldalú négyzet szerkesztése. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

787.

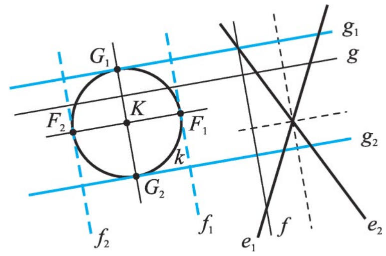


789. Felhasználjuk: A kör sugara a szerkesztendő szabályos háromszög magasságának kétharmad része. A szerkesztés: ① $\frac{3}{2}r$ befogóval és rajta fekvő 30°-os szöggel derékszögű háromszög szerkesztése → a háromszög átfogója a szabályos háromszög oldala, a. ② P ponton át a hosszúságú húr szerkesztése (a módszert lásd a 778. feladat megoldásánál) → A; B. ③ AB oldalú szabályos háromszög szerkesztése a körbe. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

791.



792.



790. A K középpontú körhöz a P pontból e hosszúságú érintőszakasz húzható. Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért $PE = e$ felhasználásával Pitagorasz-tétel szerint $KP = \sqrt{e^2 + r^2}$. $\Rightarrow$ A keresett P pontok egy K középpontú, $KP = \sqrt{e^2 + r^2}$ sugarú k' körön vannak. A k' kör bármely P pontja megfelel. A keresett ponthalmaz egy K középpontú, $KP = \sqrt{e^2 + r^2}$ sugarú k' kör.

791. Adott: k; e; α. A szerkesztés: ① e-vel $(+\alpha)$ és $(-\alpha)$ szöget bezáró egyenesek: f és g ② K-ból merőleges f-re és g-re. ③ a merőlegeseknek k-val való metszéspontjai lesznek az érintési pontok: G_1; G_2; F_1; F_2. ④ G_1-ben és G_2-ben párhuzamos g-vel: g_1 és g_2 érintő. ⑤ F_1-ben és F_2-ben párhuzamos f-fel: f_1 és f_2 érintő. 2 vagy 4 megoldás lehet.

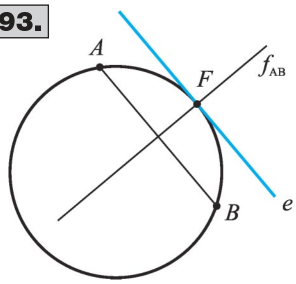
792. Adott: k; e_1; e_2. **1. eset:** e_1 és e_2 nem párhuzamos. A szerkesztés: ① e_1 és e_2 által meghatározott szögek felezése. ② a szögfelezőkre merőleges egyenesek: f és g. ③ K-ból merőleges f-re és g-re. ④ A merőlegeseknek k-val való metszéspontjai lesznek az érintési pontok: G_1; G_2; F_1; F_2. ⑤ G_1-ben és G_2-ben párhuzamos g-vel: g_1 és g_2 érintő. ⑥ F_1-ben és F_2-ben párhuzamos f-fel: f_1 és f_2 érintő. 4 megoldás van.

2. eset: Ha $e_1 \parallel e_2$, akkor a bezárt szög 0°, ezért két e_i-vel párhuzamos megoldás van.

793. Felhasználjuk: AB felezőmerőlegese felezi az AB ívet és átmegy a kör középpontján. A szerkesztés: ① AB felezőmerőlegese: f_{AB}. ② $f_{AB} \cap k = F$. ③ F-ben merőlegest állítunk f_{AB}-re: e. Egyértelmű a megoldás.

794. A K középpontú körhöz P-ből húzott érintők érintési pontjai E_1 és E_2. $E_1PE_2\sphericalangle = \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow E_1PK\sphericalangle = \alpha/2$. A keresett P pontokra KP szakasz hossza egy r befogójú, vele szemben $\alpha/2$ hegyesszögű derékszögű háromszög d átfogója. $\Rightarrow$ A P pontok a K középpontú, d sugarú k' körön vannak. A k' kör minden pontja megfelelő. A keresett ponthalmaz a K középpontú, d sugarú k' kör.

793.



795. A szerkesztés: ① r; 22,5°; 90° $\rightarrow$ $ABC\triangle$. ② K középpontú, AB sugarú kör: k'. ③ $k' \cap e = P$. 0; 1 vagy 2 megoldás lehet.

796. Legyen P a feltételeknek megfelelő pont. $\Rightarrow E_1PE_2\sphericalangle =$ $= 60°$. KP felezi az $E_1PE_2\sphericalangle$-et és KE_2 sugár merőleges az E_2P érintőre $\Rightarrow$ A KE_2P derékszögű háromszög hegyesszögei 30° és 60°, ezért $\underline{\underline{KP = 2r}}$.